



56567

56568

P

Mag. St. Dr.

MXIV⁹
27+28



Matem. pol. 1238.

Armar: 12,
C.

A. 38.

pp. Bernardinus: Vitruv.

1886. VI. 3.

Dele

WIII $\frac{7}{15}$

M

W

loc
ron
ob

a
AA
&

Ari

PRÆLECTIONES
MATHEMATICÆ
Ex
WOLFIANIS ELEMENTIS
ADORNATÆ,

atque sic

Usui AUDITORUM MATHESEOS

ACCOMODATÆ;

Ut quæ ibi prætermiffa, vel in alium
locum rejecta defiderari poterant à Ty-
ronibus, adjicerentur; Quæ verò vel
obscuritatis, vel prolixitatis accusari so-
lebant, dilucidius & breuius expo-
nerentur

à P. JACOBO NAKCYANOWICZ S. J.

AA.LL. & Philosophiæ Doctore, in Academia
& Universitate Vilnensi Publico ac Ordina-
rio Matheseos Professore

P. 11. TOMUS PRIMUS *N. 70.*

Qui commentationem de Methodo Mathematica
Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Pla-
nam & Analysim complectitur.



VILNÆ

Typis S. R. M. Academicis

Annò 1759.



56567

Ca



De
han
ca

Illustrissimæ & Excellentissimæ

DOMINÆ

ELISABETHÆ de

OGINSCIIS

PUZYNINÆ

Castellanæ Mscislaviensi, Capitanæ
Triscensi &c. &c.



*Antum abest, ut conqui-
rendae sint causae cur tuo
potissimum NOMINI
ILLUSTRISSIMA
CASTELLANA haec
Mathematicum Elementa
inscribam, ut potius sive*

*Dignitatis tuae amplissimae, sive in scientiam
hanc eximiae liberalitatis tuae ratio spectetur,
ea jure suo omnino ad te pertinere videatur.*

(2)

Digni-

DEDICATIO.

Dignitas equidem Tua excellentissimo DUCUM OGINSIORUM sanguine orta, DUCIBUS itidem PUZYNIS conjuncta, perqué Viros totius Poloniae ac Lithvaniae Principes diffusa, imò ad Regum usqué sanguinem pertingens ea est, à qua suus honor suusqué amor, quem in tot Regibus Augustissimisque Imperatricibus caeterisque amplissimis Viris ab omni aevo hac praecipue aetate nostra suspeximus, & admirati sumus in ejusmodi scientiam cumulatissimè redundat. Beneficentiam verò ac liberalitatem tuam in rem nostram equis in Te maximam ac profusissimam non videat? cum palam sit universo Poloniae Regno tibi uni Mathematicas Artes usqué eò in deliciis & amoribus fuisse, ut in hac Alma Academia & Universitate exstruendae Speculae Astronomicae sumptus copiosè subpeditâris; quin etiam si per summam temporum difficultatem id tibi licitum fuisset, cerneremus jam pridem eam Academiae nostrae accessisse celebritatem, quam aliarum gentium Academias ab Astronomicis observationibus consecutas fuisse accepimus.

Nequé

DEDICATIO.

Nequē nunc ita sum animo constitutus,
ut de tuo in rem Mathematicam singulari
studio non plura à te sibi Academia spera-
re debeat, quàm quae omnium Literatorum
spes concipere possunt. Sed longus satis fo-
rem, si hoc loco cū vetera tum recenter à
Te Nobis benevolentiae argumenta luculen-
ter declarata percenserem. Quapropter ut
ipso factō potius testaremur, quanti ea fa-
ciamus, quae à Te in Nos inque rem augen-
dam literariam profecta sunt, hoc velim
Matheſeos universae opus in perpetuum Tibi
extet tui tam insignis beneficii, nostrique offi-
cii monumentum. Id quod & Amplitudo
Nominis tui jure sibi vindicat & gratus a-
nimus noster debet, benevolē à Te acceptum
iri spero. DEUS O. M. Te Nobis servet
diu incolumem.

Digna enim es, ut millenos annos vi-
vas, antequam Novum Sidus accedas
(3) Astris,

DEDICATIO.

Astris, in quod Omnes quotquot Nos consequentur Mathematicum Studiosi mentis oculos defigentes memori illud fidelique animo velut è Specula caetera Astra, perpetuo contemplantur.

Illustrissimæ
Meritissimæque Dignitatis
& Excellentiae tuæ

Observantissimus cultor
Jacobus Nakcyanowicz
è Societate JESU.

Vilnæ
i. 7bris 1759.

PRÆFATIO



PRÆFATIO.



Ulganti mihi Prælecti-
ones Mathematicarum A-
cademicas duo sese of-
ferunt, quorum red-
denda videtur esse ra-
tio: alterum, quod præ-
ter communem Multo-

or
vicz
J.

rum consuetudinem non propria, sed Cl.
WOLFFII Elementa in usus Academi-
cos danda judicârim; alterum, quòd
quædam prætereundo, alia adjiciendo,
nonnulla etiam immutando opus hoc
Illustr: Viri quasi innovare ausus fu-
erim. Etenim hac super re cûm ma-
ture deliberarem, varios & satis mul-

(4) tos

PRÆFATIO.

tos de Matheseos principiis evolvi libros; in omnibus res easdem aliis atque aliis verbis expressas legi; novi verò in plerisque præter earum confusionem & præposterum ordinem ferme inveni nihil. Alii enim toti in praxibus non principia, sed jam usus eorum tradunt; alii vero id agunt, ut videantur planè non perspicere & intellectum humanum sic à natura comparatum, & ipsas scientias ita ordinatas, ut nisi hæ debito ordine, Euclidæa methodo, distinctisque notionibus proponantur, ille nihil unquam rectè cognoscere possit. Unde cum Arithmetices studio jam Algebram, jam Geometriam conjungunt; atque sic è multis diversis omnino inter se scientiæ partibus unum quoddam confusum chaos discentibus proponunt, quod (si vel maximè ipsi intelligent) aliis distinctè explicare minimè possunt. Ea est Hominum istorum infelicitas, ut cum amplificare ingenuas artes

PRÆFATIO.

artes & communi bono maximè prodesse laborant, illis non parùm officiant, huic detrimentum non leve afferant. Nam cùm Mathesis ea sit Scientia, quæ mentem nostram cùm in omnibus aliis, tum præcipuè in Severioribus Disciplinis ad veritatem scitè inveniendam instituat, atquè summopere perficiat, Homines verò illi viam ad eam rebus sine ordine congestis difficilem, confragosam & planè inviam reddant, aditum nobis ad rerum cognitionem præcludunt; ut non modo ad novas suis è latebris veritates erundas, verùm ne ad erutas quidem perfectè cognoscendas perveniamus. Quare ea Tyronibus principia existimavi semper esse tradenda, quæ & nulli confusioni obnoxia, & accuratâ methodo conscripta, ac proinde perspicua sint ac facilia.

Hujusmodi verò cùm non meo solum, verùm multarum etiam Universitatum judiciò Wolfii Elementa habeantur, ea Prælectionum Mathematicarum

PRÆFATIO.

earum loco assumenda esse existimavi; maluiquē aliena tradendo id quod jam optimè scriptum est, docere, quàm quod docendum sit, scribere.

Quia verò Vir ille Sapientissimus Elementa sua iis præcipuè, qui omnem ferme vitam Mathematicis in disciplinis exacturi essent, scripta voluit, quædam copiosius, nonnulla subtilius, multa etiam parciore calamo perstringendo tradidit; ut aliis immorandi, aliis speculandi, aliis etiam nova inveniendi maturè occasionem offerret; Ego plurimos hic nactus Auditores, quibus totum vitæ curriculum iis in studiis absolvere integrum non est, ut Eorum & commoditati & necessitati magis consulerem, alia strictius contrahere, quædam clariùs exponere, nonnulla etiam addere necesse habui; ne aut fusiora legentibus, aut profundiora vel occulta scrutantibus, tempus aliis destitutum, elaberetur. Nihil tamen quod ad perfectam Mathematicum cognitionem opus est missum feci. Nolui enim
cùm

PRÆFATIO.

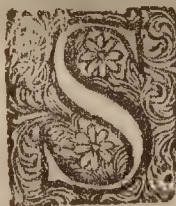
cùm prodesse quibusdam studerem aliis obesse: Quin etiam cuius persum esse velim, Eos, qui omnia, quæ hic sunt tradita plenè & perfectè comprehenderint, multa in ipso Authoris opere longè faciliùs cognituros, dum uberiores quorundam explicationem, quam ibi desiderabant, legerint. Algebrae, quam perperam ut dictum nonnulli cum Arithmetica coniungunt, nullam hic, ne ab accurata methodo recederem, mentionem feci, verum servato scientifico ordine Arithmeticam primum, tum Geometriam, Trigonometriam planam, Algebrae, deinde reliquas Matheseos partes propitiis Superis ad usus Academicos pervulgandas curabo.

DE ME.



DE
METHODO
MATHEMATICAE

PRÆFATIO.



I quid mei iudicii est, operam non inanem sumit, qui Methodum Mathematicorum diligentissime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathematica percipienda animum, quantum potest attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perspicit; verum ad alias etiam disciplinas, ut ut labore non adeo facili, cum

cum
tra
pr
ret
cum
stu
dim
dan
ter
(c
Qu
da
cit.
com
ube
nive
pat
phi
est
adm
rion
(a
(b
(c
(d)

PRÆFATIO.

cum fructu tamen omnino insigni, eandem transfert. Quodsi verò *Matheſis* non aliam, præter hanc unicam Cultoribus ſuis afferret utilitatem, eidem tamen diligenter incumbere deberent quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumquæ in finem ſtudium Mathematicum tantopere commendant Viri Docti ac intelligentes, quos inter (a) Lockium (b) Malebranchium (c) Tſchirnauſium nominasse ſufficiat. Quorum in *Philosophia* rationali illuſtranda ſolertia haud paucorum opinionem vicit. De Methodo igitur Mathematica commentationem, mole exiguam, ſed rerum ubertate gravem *Elementis Matheſeos* *Univerſae* prætermiſi, ne in iis deſiderarer pati induſtriam meam, quorum ad rectè philoſophandum quam maxime neceſſaria eſt cognitio: (d) inprimis cum exiguus admodum ſit Eorum numerus, quibus interiora methodi ſunt perſpecta; multò minor autem

(a) In Tract: De directione ingenii

(b) De inquirenda veritate l. 6. c. 6. & 7.

(c) In Introductione ad Matheſin & Phyſicam.

(d) Legatur Caput I, V. & VI. præſertim Logicae.

PRÆFATIO.

*autem illorum, qui methodo Mathematica
promptè utuntur. Caeterum hæc commen-
tatio de methodo singulari cum attentione
perlegenda, Et ubi Arithmeticae ac Geo-
metriae Elementa evolvuntur, præcepta
Methodi sunt relegenda; tum ut penitus
intelligatur, tum ut appareat, quomodo
iis satisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudi-
um verè aquet intellectum.*



§
ordo
mat
§
nibu
ad e
tand
biqu
anno
§
tion
quæ
§
in m
§
gno
gult
§
cog
ad
qua
non

atica
men-
tione
Geo
cepta
mitus
modo
studi.

DE
METHODO MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

§. I. Nomine Methodi Mathematicæ intelligitur ordo, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. II. Ordiantur autem Mathematici à Definitionibus: inde ad axiomata & postulata; in Mathesi mixta, ad experientias, seu observationes progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique verò corollaria & scholia, si è re visum fuerit, annectunt.

§. III. Sunt autem Definitiones primæ rerum notiones, quarum ope inter se distingvuntur, & unde quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. IV. Per notionem quamlibet, ejusdem rei in mente repræsentationem intelligo.

§. V. *Notio clara* est, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit: e. g. quòd figura data sit triangulum.

§. VI. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est e. g. Plantæ; ad cujus conspectum dubitas utrum ea sit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui solet.

A.

§. VII.

§. VII. *Clara notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis, e.g. quod circulus sit figura lineæ curvæ in se redeunte terminatæ ejus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. VIII. *Confusa est notio clara*, si notas ex quibus rem oblatam recognoscis recensere minimè valeas, ut ut in tales sit resolubilis, qualis est e.g. notio coloris rubri.

§. IX. *Distincta notio adæquata* dicitur, si & notarum ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; e.g. notio circuli §. 7. tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantia æqualis & terminationis notiones distinctas habueris. Notæ vero dicuntur rebus intrinseca, unde res agnoscī, & ab aliis valent distingvi.

§. X. In hac Analyfi cum progredi liceat donec ad notiones irresolubiles perveniat, notionum adæquatarum dari gradus manifestum est.

§. XI. *Inadæquata est notio*: Si notarum, quæ distinctam notionem ingrediuntur nonnisi confusas notiones habueris.

§. XII. Definitiones Mathematicæ omnino distinctæ & quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit adæquatæ sint oportet.

§. XIII. Hinc in definitionibus, vocibus non utuntur subsequentibus, nisi vel ex antecedentibus vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subiiciantur.

§. XIV. Definitiones verò ad duas classes commodè revocantur; sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. XV. *Definitio nominalis*: est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distingvendam sufficientium: talis est quadrati, si figura quadrilatera æquilatera rectangula esse dicatur.

§. XVI. *Definitio realis* est notio distincta rei
gene-

8
genefim, hoc est modum, quò fieri potest, exponens.
Talis in Geometria est circuli, si per motum lineæ
rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. XVII. Definitiones tam reales, quàm nomina-
les, cum in se considerari, tum inter se conferri pos-
sunt. Quidquid ex consideratione eorum, quæ in una
definitione continentur immediatè deducitur *Axioma*
vocatur, si quid rei convenire aut non convenire e-
nuntiet. *Postulatum* verò si quid effici posse affirmet
vel neget. e. g. Ex genesi circuli liquet, *omnes re-
ctas ex centro ad peripheriam ductas inter se æqua-
les; esse cum unam, eandemque lineam in diverso situ*
referant. Hæc adeo propositio in axiomatum nume-
ro habetur. Sed dum per eandem definitionem in-
telligitur: *ex quovis puncto, quovis intervallò circu-
lum describi posse*: id inter postulata collocatur.

§. XVIII. Quoniam igitur Axiomatum & Postu-
latorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus
fluunt, cognoscitur, demonstratione nulla indigent.
Vera enim esse intelliguntur, quam primùm realitas
Definitionum innotescat.

§. XIX. Multi hac axiomatum proprietate abu-
tuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare
nesciunt pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in
Axiomatum numerum referri propositiones, quas sine
probatione non admittunt intelligentes.

§. XX. Cum Axiomatibus & postulatis etiam ex-
perientiae nonnunquam confunduntur. *Experiri au-
tem dicimur, quidquid ad perceptiones nostras atten-
ti cognoscimus.* e. g. dum accensâ candelâ videmus
ea, quæ ante non apparebant.

§. XXI. Experientiæ itaque sunt rerum singulari-
um, quoniam nonnisi res singulares percipimus.

§. XXII. Mathematici experientias à conclusioni-
bus inde deductis accuratè distinguunt: aliis ut plu-
rimum has cum illis confundentibus. e. g. quod can-

delà accensa corpora, quæ ante non apparebant in conspectum prodeant per experientiam innotescunt, quodsi verò perpendens lumen in causa esset tenebris disculis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modò se habentium eundem esse effectum, infero: *Quidquid lumine collustratur, videri potest*, hæc Propositio, non in experientiarum, sed conclusionum per legitimam confirmationem numerum referenda.

§. XXIII. Istius modi conclusiones omittis experientis commemorantur, si modus quò ex his eliciuntur omnibus fuerit notus. Quodsi verò non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam eliciatur experientia; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit.

§. XXIV. *Propositio Theoretica ex pluribus Definitionibus inter se collatis eruta* Theorema appellatur. e. g. Si in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediatè ex ipsis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis confertur; *Parallelogrammum esse trianguli duplum*: ea propositio in Theorematum numerum referenda.

§. XXV. Duo autem sunt, quæ in omni Theoremate attendantur: *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Propositio enuntiat, quid rei euidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: Demonstratio rationes exponit, ob quas intellectus illud ipsi convenire judicat.

§. XXVI. Hinc quælibet propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commodè distinguitur, Hypothesis conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur, hæc verò complectitur, quod affirmatur, vel negatur e. g. in Propositione allata hypothesis est: *Si Triangulum & Parallelogrammum super æquali*
basi

basi & ejusdem altitudinis existant; Thesis autem, Parallelogrammum hujus dimidium est.

§. XXVII. Notandum verò si propositio fuerit eathgorica, tum ipsam definitionem subjecti esse hypothese[m], licet ista hypothesis distinctè non exprimat[ur]. e. g. Si *tres in triangulo anguli 180 graduum* dicantur, hypothese[m] carere videtur Propositio, quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si *quædam figura tribus lineis rectis terminetur, tres habet angulos junctim sumptos* duobus rectis æquales. En hypothese[m], quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. XXVIII. Nexum aut repugnantiam inter The[s]im & Hypothese[m] in propositionibus Demonstratio manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in hypothese[m] ac The[s]i continentur, eorundemque proprietates ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ demonstrationum principia existunt.

§. XXIX. Quoniam verò in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerint evicta, Definitiones ac propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur citari solent, partim ut appareat genuina principia adhiberi, partim ut ignaris constet unde ipsorum certitudo petenda.

§. XXX. Ex citationibus itaque liquet, quænam, & quam multa, supponenda sunt, & quo ordine procedendum, ut ritè percipiatur demonstratio propositionis.

§. XXXI. Ratio ex principiis conclusiones inferendi eadem est, quæ in Logica docetur. Sunt enim demonstrationes Mathematicæ congeries quædam Enthymematum, ita, ut omnia vi Syllogismorum concludantur, omnis saltem præmissis, quæ vel sponte meditant[ur] o currunt, vel per citationes in memoriam revocantur.

§. XXXII. Problemata facienda proponunt, & tribus partibus constant, *Propositione, Resolutione, ac Demonstratione*. In *Propositione* quid fieri debeat indicatur. In *Resolutione* singuli actus ordine debito recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. In *Demonstratione* evincitur factis iis quæ *Resolutio* præcipit effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesim *Resolutio*, Thefim verò *Propositio* constituit.

§. XXXIII. Si ex Propositionibus generalibus eruantur imo vel Propositiones *particulares in specie*, vel 2do aliæ quædam *universales in genere*, dictæ Propositiones *Corollaria* dicuntur. Primum Corollariorum genus *Demonstratione* non indiget, non item alterum. quoties itaque ex aliis Propositionibus aliquid generaliter inferitur, ratio illationis indicanda. e. g. Si ex Theoremate illo: *Tres anguli sunt æquales duobus rectis in omni triangulo*. eruat hunc corollarium, in *triangulo rectangulo unus tantum actus rectus angulus esse potest*. Ratio illationis non negligenda, quod scilicet positis duobus actibus rectis tertius nihilo æqualis foret.

§. XXXIV. In scholiis denique tam definitionibus, quam propositionibus, earumque corollaris subiungi solitis obscura explicantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, & si quæ alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. XXXV. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum afferre solent ii præsertim, qui lucro & pecuniæ corrogandæ intenti, totos se praxi discendæ dedere. Nempe imò vitio vertitur Geometris, quod multa definiant & probent, quæ definitione & probatione non indigent. 2dò Quòd ordinem, quò generaliora & simpli-

simpli
est, n
tia u
§.
laude
tissim
quam
ut ut
quib
vider
inger
scien
tur,
disce
metr
defin
band
præf
viris
§.
quo
nimi
ex a
mur
gera
Ora
teri
tris
ri d

(a)

simpliciora specialibus & compositis præponi necesse est, negligent, nec ad unum argumentum pertinentia unò locò ponant.

§. XXXVI. Sed sciant ii (utor verbis omnium laude Academiarum in re Mathematica viri celebratissimi Volii) *(a) Nos & Theoriam & Praxim aestimamus quamvis non eodem, sed sub inamquamque pretiò, ut utriusque jus habeatur honor.* Viri autem boni ii, quibus natura manus, locò ingenii dedisse censetur, *(b)* viderint, ne de Theoria, deque Methodo Geometrarum ingenii locò manibus judicent; & siquidem lucri quam scientiæ cupidiore sint, ut felicius sine suo potiantur, (per nos licet) cuiusque sortis etiam praxibus condiscendis dent operam; dummodo aliquando Geometras non minùs stolidè quàm impudenter carpere definant eò, quod nimii sint in definiendo & probando, Enimverò ut cum omnibus scientiis, tum præsertim Geometriæ laudi verissimæ ab omnibus viris mentis sanioris ducitur rigor in demonstrando.

§. XXXVII. Sed neque ordo jure taxatur, sine quo demonstrationes accuratæ dari non possunt, eò nimirum ordine singula proponenda sunt, quò unum ex altero faciliùs infertur. Quare cùm satis experiamur id fieri minimè posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt *Ordo Scholæ Philosophis vulgaribus, Practicis, cæterisque mentis hebetioris relinquendus, à Geometris verò, aliisque viris quibus res profundius rimari datum est, ordo naturæ retinendus.*

(a) Tomo V. cap: 6. de stud: Hydrost: §. 267. (b) Ibid:





ELEMENTA ARITHMETICÆ

CAPUT I.

De principiis Arithmeticæ,

DEFINITIO I.

§. I. Arithmetica est Numerorum scientia. Pars ejus Practica est Scientia computandi; id est ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 simul sumptis sit æqualis.

DEFINITIO II.

2. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* est abstractū, per quod dicimur unū.

DEFINITIO IV.

4. *Unitates eadem* sunt, quæ per eandem notionem cognoscuntur. *Diversæ* sunt, quæ cognoscuntur per diversas.

SCHOLIUM.

5. Ex: gr: Si *A* sit globus lapideus, *B* itidem globus lapideus, erunt *A* & *B* unitates eadem, sed si *A* fuerit globus lapideus, *C* plumbeus, erunt *A* & *C* unitates diversæ. Quod si *A*, *B*, & *C* tantum ut globos consideres, erit etiam *C* eadem unitas cum *A* & *B*. (§. 3.)

DEFINITIO V.

6. Si *A* sit unum, *B* sit unum, *C* sit unum *D* sit unum &c. non tamen *B*, *C*, *D*, &c. sint idem cum *A*, erunt *A*, *B*, *C*, *D*, &c. Plura seu multa.

DEFI-

DEFINITIO VI.

7. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

8. Si A sit idem cum B, C, & D simul sumptis, dicetur A *Totum*; B verò C & D dicentur ejus *Partes*: & intuitu partis B, reliquas C, & D &c. *complementum ad totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

9. Quidquid refertur ad unitatem, ut linea recta ad aliam rectam *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

10. Si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam.

SCHOLION II.

11. Generaliter definitur numerus, ut sub eodem definitione numeri integri & fracti rationales & irrationales veniunt.

DEFINITIO IX.

12. Numerus *aeterminatus* est, qui refertur ad unitatem datam. e. g. 3, 5 &c. pedes digiti &c. *Indeterminatus*; qui refertur ad unitatem vagam; diciturq; *Quantitas*.

SCHOLION.

13. Ex: gr: Numerus *indeterminatus*, qui dicitur *quantitas* est latitudo fluvii. Quod si quaesiveris quanta sit, unitatem quandam ad arbitrium assume e. g. chordam, pedem, cubitum &c. illa unitate assumpta metire, ac pro diversa unitate assumpta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enuntia. Latitudo itaque fluvii est *quantitas*, sive numerus qui refertur ad unitatem vagam hoc est chordam, pedem, cubitum &c.

DEFI-

DEFINITIO X.

14. *Æqualia* sunt, quorum unum salva quantitate alteri substitui, potest.

Inæqualia sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

15. Quod alteri salva quantitate substitui potest, alteri æquale est, sed pars unius inæqualium alteri toti substitui potest (§. 14.) Ergo pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

16. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 14.) erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

17. *Signum æqualitatis* est $=$

DEFINITIO XI.

18. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est. *Minus* quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM

19. Cum pars unius inæqualium A, alteri toti e.g. B æqualis sit (§. 15.) & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 16.) inæqualium unum A majus, alterum B minus est.

HYPOTHESIS II.

20. *Signum majoritatis* est $>$; *minoritatis* $<$.

DEFINITIO XII.

21. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ à se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ à se invicem discerni debent. Itaque *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res à se invicem discerni debent.

CO-

COROLLARIUM I.

22. Nihil ergo in uno similium est, quod non æquè sit in altero, modò ejusmodi sit, ut sine alio assumptò cognosci possit.

COROLLARIUM II.

23. Cùm quantitas sine alio assumpto per se non cognoscitur (§ 12, 13.) similia salva similitudine quantitate differre possunt. Atquè adeò quantitas est discrimen internum similium.

HYPOTHESIS III.

24. *Signum similitudinis est* \sim

DEFINITIO XIII.

25. *Pars aliquota* est, quæ aliquoties repetita integro est æqualis. *Pars aliquanta* est quæ repetita aliquoties semper vel major vel minor est totò.

DEFINITIO XIV.

26. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent; vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

27. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumpta alteram superare potest; seu quarum una ab altera ablata tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumpta alteram superare non potest.

DEFINITIO XVI.

28. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere. *Numerus numeratus* est, cujus

eius unitas denotat ens in specie.

S C H O L I O N

29. *Ex: gr: Si quis simpliciter dicat sex: is non determinat, quatenus sint illa Entia quæ numerantur, adeoque pronuntiat numerum numerantem. Contra si quis dixerit cum addito. Sex globi aurei, is speciem entium determinat, & pronuntiat Numerum numeratum, vocant nonnulli primum abstractum, alterum numerum concretum.*

D E F I N I T I O XVII.

30. Numeri inter se homogenei sunt, qui ad eandem, Heterogenei, qui ad diversas unitates referuntur.

S C H O L I O N.

31. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis namque numerus determinatam aliquam unitatem supponit (§. 9.) Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus. (§. 4.) Hinc tres globi aurei, & sex argentei sunt inter se heterogenei, sed tres globi aurei & sex itidem aurei, homogenei sunt numeri.*

D E F I N I T I O XVIII.

32. Numerus integer est, qui refertur ad unitatem, tanquam totum ad partem.

D E F I N I T I O XIX.

33. Numerus fractus est, qui refertur ad unitatem, tanquam pars ad totum, dicitur is etiam fractio, item Minutia.

D E F I N I T I O XX.

34. Numerus rationalis est, qui unitati est commensurabilis, seu qui intelligi potest quantus est respectu unitatis; vocatur etiam effabilis.

DEFI-

DEFINITIO XXI.

35. Numerus rationalis integer est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

36. Numerus rationalis fractus est qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

37. Numerus irrationalis mixtus est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

38. Numerus irrationalis, sive surdus est, qui unitati est incommensurabilis; seu de quo non potest intelligi, quanta sit pars unitatis, vel quanta sit ejus pars unitas. Vocatur etiam ineffabilis, item Geometricus.

HYPOTHESIS IV.

39. Si in numerando ad denarium pervenitur initium numerandi repetatur, sed tamen denariorum numerus exprimatur.

COROLLARIUM.

40. Decem itaque nominibus opus est ad decem numeros rationales primos exprimendos & præterea aliis, quibus decadam multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLIUM.

41. Lex numerandi, quam in hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta. Enimvero non modo Erhardus Weigelius tetraëtycam, sed celeberrimus Leibnizius binariam arithmeticam excogitavit, (c) nonnisi duabus notis 1 & 0 utentem.

(c) Hist. de l' Acad. Royale des Sciences An. 1703. p. 175. & sequ. Edit. Amstel.

tem. Sreniffimus Carolus XII. Rex Sveciæ calculum sexagenarium excogitavit referente Emmanuele Svedenborgio (d) Arithmetica verò decadica quæ vulgo utimur denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.

DEFINITIO / XXV.

42. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt: *Unum, Duo, Triâ, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem.* Idem numeri generaliter vocantur unitates, nec opus est ut definiantur: dicuntur etiam digiti. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*, tres *Triginta*, quatuor *Quadrâginta*, quinque *Quinquaginta*: *Sex Sexaginta*, septem *Septuaginta*, octo, *Octoginta*, novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*, ex decem centenariis *Millenarius*, ex mille millenariis *Millio* ex mille millenariis millionum *Billio*: ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejusque quævis multipla dicentur articuli.

HYPOTHESIS V.

43. Notæ numeraricæ sunt novem sequentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ut verò non solum unitates, sed & decades, centenarios millenarios &c. designent, valor ipsis tribuatur localis: ita ut solitariae, vel in loco dextimo positæ, unitates, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. designent. Loca

(d) In Miscellau: Berolin: p. 336. & sequ:

ca vacua repleantur cyphra 0, quæ scilicet sit nullitatis nota.

COROLLARIUM I.

44. Numerorum itaque partes hoc ordine sunt.

Unitates
Decades } Simples

Centenarii

Unitates

Decades

Centenarii

Unitates

Decades

Centenarii

Unitates

Decades

Centenarii

Unitates

Decades

Centenarii

Unitates

Decades

Centenarii

Millenariorum

Millionum

Millenariorum Millionum

Billionum

Millenariorum Billionum &c.

SCHOLIUM I.

45. Characterum arithmeticoꝝ electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt. Non tamen omnes æque commodi. Id quod has cum illis conferentes experiuntur. Ab Arabibus inventæ vulgò feruntur. Sed ipse Arabs ALSEPADI teste Celebrissimo Vallisio (d) inventionis laudem Indis defert. In Europam illatos sunt qui circa annum C. 999 & sunt qui usque circa A. C. 524 autument; quod Criticis relinquimus.

SCHOLIUM II.

46. Ex collatione diversarum figurarum numerarum discant velim, qui artem inveniendi cordi habent,

(d) Arithm. oper. c. 9. f. 48. vol. 1. oper. Mathem:

quantum momenti in eo situm, ut ars characteristica perficiatur.

COROLLARIUM II.

47. Si notis numericis substituantur literæ ad placitum electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 43.) numerus occultè scribi poterit.

SCHOLIUM III.

48. Ex; gr: Denotent literæ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima serie.

I. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

b. c. d. e. f. g. h. i. k. l.

erit 3748. = d h e i.

PROBLEMA I.

49. Numerum scriptum enuntiare, hoc est cui-libet characteri valorem competentem assignare.

RESOLUTIO.

I. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando initio à dextris factò.

II. Nota dextima, tertix classis notetur lineola transversa ad apicem; nota dextima classis quintæ notetur duabus lineolis, dextima 7mæ 3bus &c.

III. Comma solitarium enuntietur per millenarios, lineola transversa una per millones, duæ per Billiones, tres per triliones &c. nota verò finistima cujusvis classis per centenarios, media per decades, dextima per unitates proferatur. (§. 44.) Sic factum quod patebatur. Ex: gr: Numerus sequens.

2^a, 125, 473^a, 613, 578^a, 432, 597

Ita enuntiat: Duæ Triliones, centum viginti quinque millia, quadringentæ septuaginta tres Billiones, sexcenta tredecim millia, quingentæ septuaginta octo milliones, quadringenta triginta duo millia quingenta

B

nona-

nonaginta septem. Nostro idiomate *Dwa Triliony, sto-dwadzieścia pięć tysięcy, czteryście siedmdziesiąt trzy Billiony, sześćkroć sto trzynaście tysięcy pięćset, siedmdziesiąt ośm millionów, czterekroć sto trzydzieści dwa tysiące, pięćset dziewięćdziesiąt siedm.* Sive aliter. *Dwa tysiące tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy, 125 tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy, 473 tysiące tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy, 613 tysięcy tysięcy tysięcy tysięcy, 578 tysięcy tysięcy tysięcy 432 tysiące pięćset dziewięćdziesiąt siedm.*

HYPOTHESIS VI.

50. *Quantitates aut numeros indeterminatos, literis alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam maioribus A, B, C, exprimimus.*

HYPOTHESIS VII.

51. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjectâ lineâ subscribitur. Eorum inferior, seu Denominator indicat unitatem, seu totum in partes divisum; superior verò seu Numerator, numerat partes in casu proposito datas. Ex: gr: Duæ*

partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat lineam in tres partes æquales esse divisam; numerator 2 duas istiusmodi partes assignat.

SCHOLIUM II.

52. *Subscribitur numeratori denominator, ut appareat, qualem partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus (§. 36.)*

DEFINITIO XXVI.

53. *Additio est inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis simul sumptis est æqualis. Numeri dati vocan-*

vocantur *summandi* quæsitus *summa* vel *aggregatum*.

COROLLARIUM

54. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumpto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

55. *Signum additionis est + quod per plus effertur solet. Ita $3 + 4$ denotat summam ex 3 atque 4, & pronuntiatur: 3 plus 4.*

DEFINITIO XXVII.

56. *Subtractio est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus qui subducitur, vocatur *subtrahendus*; alter à quo subtractio fit, *minuendus*, qui invenitur *Differentia*, à nonnullis *Residuum*.*

HYPOTHESIS IX.

57. *Signum subtractionis est — quod per minus effertur solet. Ex: gr: $7 - 3$ denotat differentiam inter 3 & 7. pronuntiatur 7 minus 3.*

DEFINITIO XXVIII.

58. *Multiplicatio est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unusquoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *factores* item *efficientes*. Quæsitus *Factum*: item *Productum*. In specie factorum unus, qui aliquoties sumitur, vocatur *Multiplificandus*, qui indicat, quoties ille sumitur *Multiplicator*.*

COROLLARIUM.

59 Siquidem in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumpto æqualis, (§. 58.) istiusmodi autem inventio est iterata additio (§. 54.) multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

60. Signum multiplicationis est punctum (.) inter factores duos mediò locò positum, quod per multiplicatum effertur ex.gr: $4 \cdot 3$. dicitur 4 multiplicatum per 3. Literæ sæpius sine ullo signo junguntur. ex.gr. ab denotat factum ex a in b ; bcd factum, cujus factores b, c, d , si autem fuerit factor unus e.g. $3+2$, & alter 4. prior parenthesi includitur sic $(3+2)$ quod si ambo fuerint compositi: uterque parenthesi includitur sic $(4+2)(3+6)$

DEFINITIO XXIX.

61. Divisio est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet *Dividendus*; alter per quem fit divisio *Divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo continetur *Quotus* dicitur.

SCHOLIUM.

62. In multiplicatione & divisione opus non est ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 53. 56.) id, quod ex ipsarum definitionibus manifestum.

HYPOTHESIS XI.

63. Signum divisionis sunt (:) quæ per divisum efferri solent. ex.gr: $8:4$. denotat quotum ex divisione 8 per 4 similiter $a:b$ est quotus ex divisione a per b scri-

(scribitur subinde $\frac{a}{b}$, & tunc fractio quotum ex divisione indicat, si verò fuerit dividendus aut divisor e.g. $6 \div 2$ divisum per $2 + 2$ parenthesi vel ambo vel alteruter includuntur, ita $(6 \div 2) : (2 + 2)$ vel $(6 + 2) : 4$

DEFINITIO XXX.

64. Numerus par est, qui per duo dividi potest, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

65. Numerus impar est, qui à pari unitate differt; ut 3 differt unitate à 2, item à 4.

DEFINITIO XXXII.

66. Numerus A metiri vel juxta alios numerare dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXIII.

67. Numerus primus in se est, quem sola unitas metitur, vel numerat. ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

68. Numerus compositus est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2. Item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

69. Mensura numeri est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. Mensura maxima numeri est numerus maximus, qui ipsum metitur. e.g. 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

70. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum est numerus, qui singulos figillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. Maxima dicitur si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24.*

DEFINITIO XXXVII.

71. *Numeri primi inter se sunt, qui nullam communem habent mensuram præter unitatem. Ita 13 & 19 sunt numeri primi inter se.*

DEFINITIO XXXVIII

72. *Numeri compositi inter se sunt, qui præter unitatem communem mensuram aliam habent. e.g. 12 & 15.*

AXIOMA I.

73. *Idem est æquale sibi met ipsi.*

SCHOLIUM.

74. *Hujus axiomatis amplissimus in Analysisi est usus. Sæpe enim diversis characteribus exprimitur, & sibi æquale ponitur.*

THEOREMA I.

75. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est, id ipsum altero majus est. (§. 18.) sed quælibet pars totius, parti totius, hoc est sibi ipsi æqualis est, (§. 73.) Ergo totum qualibet sua parte majus est. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

76. *Ut Syllogismi analytici vim atque efficaciam melius*

melius percipiant, neque circa formam argumentandi haereant Tyrones præsertim aut prorsus ignari Logicae, ideo Theorematis alias per se manifesti Demonstrationem apposui, quam etiam eam ob causam in lectionibus ad lineas applicabimus. Caeterum ejusmodi per se manifesta Theoremata quae clarissimus Volsius demonstrat, brevitati studentes in numerum axiomaticum referemus. Author tamen sum iis qui acutius ingenio fuerint & copiam Volsii habuerint iis rite percipiendis dent operam priusquam ad ulteriora pedem promoveant, non exiguum inde fructum non in Arithmetica solum sed etiam in Analysis relaturi.

A X I O M A II.

77. Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea sunt æqualia inter se. Ita si $5 = 3 + 2$ & $4 + 1 = 5$ erit $3 + 2 = 4 + 1$.

A X I O M A III.

78. Si Æqualibus addas æqualia, summae sunt æquales. Ita si $5 = 3 + 2$ erit $5 + 1 = 3 + 2 + 1$.

A X I O M A IV.

79. Quod majus vel minus est uno æqualium, est etiam majus vel minus altero æqualium; si $7 > 5$ erit etiam $7 > 3 + 2$.

A X I O M A V.

80. Si majori & minori idem vel æqualia addas, aggregatum prius majus est, posterius verò minus. Multò magis si majori majus & minori minus addas, aggregatum prius majus est, posterius minus, hoc est si $7 > 3 + 2$ addas 2, erit $7 + 2 > 3 + 2 + 2$; multò magis si addas $7 + 4 > 3 + 2 + 2$.

A X I O M A VI.

81. Si ab æqualibus auferas æqualia, residua sunt æqualia. Ita si $5 = 3 + 2$ erit $5 - 1 = 3 + 2 - 1$.

B.

AXIO-

A X I O M A VII.

82. Si à majore & minore idem, vel aequalia subtrahas, residuum prius majus, posterius minus est. Ita si $7 > 3 + 2$, erit $7 - 2 > 3 + 2 - 2$

A X I O M A VIII.

83. Si aequalia per aequalia multiplices facta sunt aequalia. Ita si $5 = 3 + 2$, erit $5 \cdot 4 = (3 + 2) \cdot 4$ (§. 60.)

A X I O M A IX.

84. Si aequalia per aequalia dividas quoti sunt aequales, Quia $12 = 8 + 4$ erit $12 : 4 = (8 + 4) : 4$ (§. 63)

A X I O M A X.

85. Totum est aequale omnibus suis partibus simul sumptis. Ita si 3 est totum, erit $3 = 1 + 1 + 1$ (§. 8)

CAPUT II.

De speciebus Arithmetice in numeris integris.

P R O B L E M A II.

86. Numeros quoscunque datos addere.

R E S O L U T I O.

I. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est unitates sub unitatibus, decades sub decadi-
bus centenarii sub centenariis &c.

II. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

III. Sigillatim addantur unitates, & summa earum ipsis subscribatur.

IV. Similiter decades addantur, & summa decadi-
bus subscribatur, centenarij, & centenariis &c.

V. Hac operatione per reliquas numerorum da-
torum series continuata, habebitur summa qua sita. e.g.
Si numeri A, B, C, addendi, ita procedendum:

A35

A 3578 3 & 4 sunt 7. additis 8 prodeunt 15.
 B 524 collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas
 C 63 connumeretur decadibus datis. Itaque

4165 1 (scilicet decas) & 6 (decades) sunt
 7 (decades): additis 2 prodeunt 9. ad-

ditis porro 7, habentur 16 (decades); collocentur
 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est unus
 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt ita-
 quæ 1 & 5 (centenarii) 6, & additis adhuc 5 pro-
 deunt 11 (centenarii); collocetur 1 sub centenariis
 datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est unus millenarius
 addatur 3 (millenariis) datis, summaquæ 4 sub iis
 scribatur. Ita prodit summa quæsitæ 4165.

DEMONSTRATIO

Siquidem unitates, decades, centenarii, millenarii,
 &c. numerorum datorum sunt partes eorundem (§. 44.)
 idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumptis.
 Sed ex operatione manifestum est, numerum inven-
 tum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadi-
 bus, centenariis millenariis & numerorum datorum.
 Ergo numerus iste est compositus ex omnibus nu-
 meris datis simul sumptis, consequenter ipsis æqua-
 lis, (§. 85.) adeoque summa eorundem est. (§. 53.)

COROLLARIUM.

87. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates ad-
 duntur, quod decades in serie dexteriore numeran-
 tur, additio facilius absolvitur, si ex qualibet nume-
 rorum serie tot decades deleantur, quot in ea inve-
 niuntur, residuum infra lineam scribatur, & numerus
 decadum abjectarum seriei proximæ sinisteriori ad-
 datur.

SCHOLIUM I

88. Modus hic addendi est maxime naturalis
 (§. 43.) quò numeri heterogenei etiam adduntur.
 Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur va-
 lor

lor speciei proximè majoris, quoties fieri potest, & pro uno quoque unitas reponitur in serie proximè majore. ex: gr: sint expensæ.

Junii	45.	Flor: 16.	Grossi: 2.	Solidi:
Julii	39	28	1	
Augu	97	29	2	

Erit summa. 183 14 2
cum enim 3 solidi faciant grossum, additis 2 & 2 & 1 valor grossi semel invenitur, & remanent 2. scribuntur itaque 2 infra lineam in loco solidorum, & 1 additur seriei grossorum. similiter siquidem 30 grossi faciunt unum florenum, in serie grossorum ut ante valor floreni bis colligitur, remanentibus 14, Quare denuo 14 in loco grossorum scribuntur, & duo florenis adnumerantur.

SCHOLIUM II

89. Sunt qui examen additionis præcipiant, ut tam ex summa, quam ex summandis (considerando notas singulas instar digitorum) abiiciatur novenarius, & si residuum fuerit idem, bonam operationem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error, novenarium vel ejus multipulum adæquat, per subtractionem, de qua mox examen instituendum.

PROBLEMA III.

90. Numerum minorem è majore subtrahere.

RESOLUTIO.

I. Numerus minor majori subscribatur, ut homogenei homogeneis hoc est unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant.

II. Sub numeris hisce ducatur linea recta.

III. subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades à decadibus &c. & residua singula, loco conveniente, infra lineam scribantur.

IV. Quod si nota major è minore sit subtrahenda, ex sinistro loco in dexterorem transferatur unitas.

tas, quæ hic (§. 44.) 10 valebit, ut subtractio fieri possit. Numerus verò unitate multatus puncto notetur, ne ipsum multatum obliviscamur.

V. Si in loco finisteriore cyphra occurrat, unitas à numero proximè sequenti mutuetur. Unitas autem illa in locum dexteriores translata decas erit (§. 44.) Quamobrem ubi plures cyphræ se se insequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutantur, & numerus minor, à quo subtractio fieri debet decade augetur.

e.g. Si ex 98.0.6.4.034
Subtrahas 47386521

Differentia est. 50617513

Demptō enim 1 ex 4, relinquuntur 3 unitates infra lineam scribendæ & ablatis 2 ex 3 remanet 1 decas sub decadibus ponenda. 5 à cyphra subtrahi non possunt à millenariis itaque 4 auferatur unus & ejus locō decas cyphræ adiciatur, eritque 5 à 10 residuum 5 & ita porro.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris numeri subducas *vi operationis*, hoc est si singulas partes numeri minoris à singulis partibus numeri majoris subtrahas; sed singulæ partes numeri minoris simul sumptæ sunt numero minori æquales & singulæ partes numeri majoris simul sumptæ sunt numero majori æquales. (§. 85.) Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem è toto majore subtrahas. (§. 81.) Consequenter cum totus subtrahendus sit pars una, & totus residuus numerus sit pars altera utpote complementum minuendi (§. 8.) erit residuus cum subtrahendo æqualis ipsi minuendo (§. 85.) adeoque subtractio. (§. 56.) Q. e. d.

SCHOLIUM I.

91. Si numeri heterogenei fuerint à se invicem subtrahendi; unitas mutuo accepta, non 10, sed tot unitates valeat, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.

Ex: gr: 45 Flor: 16 Grossi. 1 Solid.

27 28 2.

17 17 2.

SCHOLIUM II.

92. Quodsi numerus major è minori subtrahi jubetur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor è majore, & defectus notatur signo —

Ex: gr: Si quis 8 Thalerosolvere debet, 3 tamen nomini habet, tribus solutis, 5 adhuc debet, ideoque isti 5 per — 5 notantur.

PROBLEMA IV.

93. Examinare subtractionem.

Residuo addatur subtrahendus. Quodsi enim summa æqualis fuerit minuendo, subtractio ritè peracta. (§56)

PROBLEMA V.

94. Examinare additionem per subtractionem.

RESOLUTIO.

I. Colligantur in unam summam singulæ series verticales, quibus constant numeri summandi initiò factò à sinistra, & progrediendò versùs dextram.

II. Summæ partiales subtrahantur à notis summæ, quæ singulis seriebus respondent. (90)

Quod si in loco dextimo qui est unitatum relinquatur cyphra, additio ritè peracta. Sit exemplum additionis

A	B	C	D
3	5	7	9
8	4	6	2
5	3	7	6
<hr/>			
I	7	4	I 7
	I	2	I 0

Colle-

Collectæ in unam summam notæ in serie A 16 subducantur ex 17. & residuum 1 scribatur sub 7. similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14. &c.

DEMONSTRATIO

Ex operatione patet à millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summendorum, & à centenariis, decadibus, unitatibus summæ, omnes centenarios decades, unitates summendorum. Quod si ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot omnino millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumpti continent; atque adeo summa numeris summandis simul sumptis æqualis est (77) consequenter additio ritè peracta (53) Q. e. d.

PROBLEMA VI.

95. *Abacum Pythagoricum construere.*

RESOLUTIO

I. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur, & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.

II. In serie horizontali summa & laterali finissima scribantur 9 notæ numericæ, seu singuli digiti.

III. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 sub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur sub 6 & ita porro.

IV. Si hæc additio per reliquos digitos continuetur, Abacus Pythagoricus construetur. Q. e. f.

ABACUS

ABACUS PYTHAGORICUS								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

S C H O L I O N.

96. *Abacum Pythagoricum mandare memoriae teneatur, multiplicationē ac divisionem expedite absoluturus.*

P R O B L E M A VII.

97. *Numerum datum per alium datum multiplicare.*

R E S O L U T I O.

I. Multiplicator scribatur sub multiplicando ut in additione (§. 85.)

II. Ducatur sub iis linea recta.

III. Infra hanc ex *Abaco Pythagorico* scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris similiter ex illis in reliquis hujus notas ita; ut decades cujuslibet producti an-
nume-

numerentur producto proximè finifteriori; & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadium, fimiliter productum ex multiplicando in centenarios in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

IV. Producta partialia addantur: Aggregatum erit factum quæsitum.

Ex: gr: Sint factores 38476 & 35.

38475	Multiplicatore sub multiplicando scripto duc 5 in 6, cumque factum vi
35	
192380	Abaci Pythagorici sit 30, scribe 0
115428	sub 5, & 3 decades annumera facta ex
1346660	5 in 7 quod est 35. Additis itaque 3

ad 35, prodeunt 38. pone 8 juxta 0
versus sinistram, & factum ex 5 in 4, nempe 20 adde
3, ut prodeant 23 scilicet centenarii & ita porro.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est singulas ejusdem partes adeoque (§. 44.) multiplicandum ipsum (§. 8.) toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineant, quoties nota secunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est, (§. 53.) adeoque summa hæc multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est partes (§. 44.) hoc est totus multiplicator (§. 8.) unitatem continet. Est itaque factum ex multiplicando in multiplicandem. Q. e. d.

SCHOLION I.

98. Si factoribus cyphrae adsint, producto invento eadem adjunguntur; ut ex sequentibus exemplis manifestum.

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 30 \overline{) 107340} \\ 9520000 \end{array}$$

SCHOLION II.

99. Quomodo absque Abaco Pythagorico sed per multipla multiplicatio & Divisio absolvatur, Item per Lamellas Neperianas, item per digitos erectos & depressos, in lectionibus pro multa scriptione paucis docebitur. PROBLEMA VIII.

100. Numerum datum per alium minorem dividere.

RESOLUTIO.

Casus I. Si divisor una nota fuerit.

I. Scribatur divisor à latere sinistro dividendi interposita lineola, tum ope abaci pythagorici inquiretur quoties in una vel duabus notis primis contineatur. Numerus, qui hoc indicat ponatur dextram versus, post lunulam locò quoti.

II. Quotoducatur in divisore, & productū, ex nota, vel notis illis primis subtrahatur, tū si quod fuerit residuū, sub linea scribatur, & nota proximè sequens eidē adjungatur.

III. Eodem quo prius modo denique inquiretur, quoties divisor in nota vel notis residuis contineatur, quotus post lunulam scribatur, cum divisore multiplicetur, productum subtrahatur.

IV. Quod si hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. Q. e. f.

Ex: gr. Sit dividendus 7856, divisor 3.

3 (7856 (2618 2 Ponantur 3 ad latus nume-

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 005 \\ 3 \\ 26 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

ri dividendi interjecta linea; tum per abacum Pythagoricum innotescit 3 in 7 bis contineri: scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti, & factum ex 2 in 3 hoc est 6 subtrahatur ex 7, residua unitas sub linea scribatur. Demittatur

jam

jam sequens nota 8, & penes residuum collocetur ut sint 18. cumque per abacum Pythag: innotescat 3 in 18. sexies contineri, scribantur 6 loco quoti & factum ex 3 in 6 ex 18 subtrahatur quo in casu nihil relinquitur. Quod si eadem ratione ultra etiam procedatur, quotus tandem integer prodit 2618. & 2 remanent, id quod indicio est numerum datum in tres partes exacte dividi non posse.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione manifestum numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est in singulis ejus partibus (§. 44.) adeoque in toto dividendo (§. 85.) contineatur: consequenter, unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus. (§. 61.) *Q. e. d.*

Casus II. Si divisor ex pluribus notis constet.

I. Collocato ut prius divisore à latere dividendi, ope Abaci Pythagorici inquiratur quoties prima divisoris nota in prima dividendi nota vel in duabus primis contineatur.

II. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum, & animadvertatur, utrum factum ex numeris superscriptis subtrahi possit, nec ne.

III. Si subtractio fieri possit, scribatur is loco quoti post lunulam, & subtractio actu peragatur. Et qui residui fuerint, demittantur infra. Quod si verò subtractio non succedat, loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in divisorem notis dividendi par quam proximè fuerit ut ex iis auferri possit.

IV. Reliqua fiant ut ante. *Ex: gr: Sit dividendus 7856, divisor 32*

$$\begin{array}{r}
 32 \overline{) 7856} \quad (245 \quad \begin{array}{l} 16 \\ 32 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Scribatur divisor à latere} \\ \text{dividendi tum per Abacum} \\ \text{Pythagoricum quaeratur,} \\ \text{quoties 3 in 7 contineantur,} \\ \text{cum itaque bis contineantur,} \\ \text{ducantur 2 in 32, \& quia factum} \\ \text{64 subtrahi potest ex 78 scriban-} \\ \text{tur post lunulam 2 \&c.} \end{array} \\
 \underline{64} \\
 145 \\
 \underline{128} \\
 176 \\
 \underline{160} \\
 16
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO

Eadem ferme est quæ in *Casu I.* unum hic addendum præterea, suppositionem istam, quâ notam imam divisoris in dividendi ima nota inquirimus nos non posse in errorem inducere: Examen enim mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLIUM

101. Sicut in multiplicatione (§. 98.) ita in divisione compendio uti licet si divisor ex una vel pluribus cyphris componatur: quia enimvero non dantur multipla nihili, siue cyphrarum, tot notae in dividendo rescantur ad finem, quot sunt cyphrae in divisore residuum verò solito modo dividitur Ex: gr:

$$\begin{array}{r}
 4000 \overline{) 684563} \quad \left\{ \begin{array}{l} 171 \\ 563 \\ 4000 \end{array} \right. \\
 \underline{4} \\
 28 \\
 \underline{28} \\
 4 \\
 \underline{4}
 \end{array}$$

PROBLEMA IX.

102. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multi-

multiplicans, aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus. (§. 58.)

PROBLEMA X.

103. *Examinare divisionem.*

I. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.

II. Facto addatur residuum à divisione si fuerit. Quod si hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime facta. (§. 61.)

SCHOLION I.

104. *Generale illud Scholion §. 125. Arithm: Volsi clarissimi brevitatis causâ hic equidem intermittimus, non tamen in praelectionibus de eo tanquam momenti maximi tacere fas erit.*

SCHOLION II.

105. *Prima danda est opera ut caput quod sequitur probè intelligatur, amplissimi non per Mathesim tantum universam sed per Philosophiam caeterasque scientias usus.*

CAPUT III.

De ratione ac proportionem quantitatum.

DEFINITIO. XXXIX.

106. *Ratio est ea homogeneorum quò ad excessum defectum, vel æqualitatem relationem quantitas unius determinatur, ex quantitate alterius sine tertio assumpto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur Termini rationis, & in specie Antecedens vocatur, qui ad alterum refertur, Consequens verò ad quem alter refertur.*

SCHOLIUM.

107. *Definitur ita in genere ratio, ut doctrinâ istiusmodi etiam ad incommensurabilia, hoc est ad quodvis quantitatum genus se extendat.*

COROLLARIUM I.

108. Cùm in fractionibus relatio numeratoris ad denominationem sine tertio homogeneo assumpto intelligatur, (§. 51.) erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

109. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumpta aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur. Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM I.

110. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad maiorem (§. 19.) vel major ad minorem, minor nempe ad maiorem tanquam pars ad totum, major verò ad minorem tanquam totum ad partem (§. 18.) Ratio itaque determinat quoties minus in maiore continetur, vel quoties majus minus continet, hoc est quantæ majoris parti minus æquetur, id quod divisio prodit. (§. 61.)

DEFINITIO XL.

111. *Ratio majoris inæqualitatis est, quam habet majus ad minus e.g. 6. ad 3. Ratio minoris inæqualitatis, quam habet minus ad majus e.g. 3 ad 6.*

DEFINITIO XLI.

112. *Ratio rationalis dicitur, quæ est ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem e.g. ut 3 ad 4.*

Irrationalis vocatur, quæ numeris rationalibus

libus exprimi non potest. (§. 38.)

S C H O L I O N

113. Sint duae quantitates A & B , sitque $A < B$. si A ex B toties subtrahas, quoties fieri potuerit, e.g. quinquies relinquetur vel nihil vel aliquid. In priori ergo casu erit A ad B ut 1 ad 5, hoc est A in B quinquies continetur, seu $A = \frac{1}{5} B$. Ratio ergo

est rationalis. Quodsi aliquid post subtractionem relinquetur, aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A . e.g. ter itidemque ex B e.g. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. si pri-

us: erit A ad B , ut 3 ad 7 seu $A = \frac{3}{7} B$, adeoque ratio denovo rationalis. Si posterius; ratio ipsius A ad B numeris exprimi non potest rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A . Sub autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur dari quantitates, quæ rationem irrationali habent. Hinc simul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumpto ratio intelligi possit.

D E F I N I T I O XLII.

114. Exponentem rationis dico quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. e.g. rationis 3 ad 2 exponens est

1 $\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$: vocatur

is etiam Denominator nec non Nomen rationis.

S C H O L I O N.

115. In Geometria demonstrabitur quod exponens

C3 ratio-

rationis datae exprimi possit linea quamvis in numeris vel rationalibus vel irrationalibus exprimi non possit.

COROLLARIUM I.

116. Si consequens est unitas, ipse antecedens est exponens rationis: e.g. Rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

117. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

118. Exponens rationis est ad unitatem, ut antecedens ad consequentem (§. 61.)

COROLLARIUM IV.

119. Rationes per exponentes discernuntur (§. 114.) atque adeo si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commodè exprimitur per A : B. (§. 63)

DEFINITIO XLIII.

120. Si terminus minor est majoris pars aliquota, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*. *Ratio* vero minoris inæqualitatis *Submultiplex*. Speciatim in casu imo *dupla*, si exponens 2, *tripla*, si exponens 3, &c. in altero *Subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si exponens $\frac{1}{3}$ &c. e.g. 6:2 habet rationem triplam, 2 ad 6 est in ratione subtripla.

DEFINITIO XLV.

121. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *Superparticularis*. *Ratio* minoris æqualitatis *Subsuper-*

superparticularis. Speciatim in casu imo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si exponens $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia* si exponens $\frac{3}{4}$ &c. e.g. 4 ad 3 est in ratione sesquitertia; 3 ad 4 in subsesquitertia.

DEFINITIO XLV.

122. Si terminus major minorem semel continet, ac insuper partes ipsius aliquot aliquetas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *Superpartiens*. *Ratio* minoris inæqualitatis *Subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *Superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$, *Supertripartiens quartas* si $1\frac{2}{3}$ &c. In posteriore subsuperbipartiens tertias, si exponens $\frac{3}{5}$, *Subsuperbipartiens quartas*, si exponens $\frac{4}{7}$ e.g. 5 ad 3. est ratio superbipartiens tertias, sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

123. Si terminus major minorem aliquoties continet, & insuper partem ipsius aliquotam. *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*. *Ratio* minoris in-

æqualitatis *submultiplex* *Subsuperparticularis*:
 speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquial-*
tera, si exponens $2\frac{1}{2}$ *tripla sesquiquarta*, si
 exponens $3\frac{1}{4}$ &c. & in altero *subdupla sub-*
sesquialtera si exponens $\frac{2}{5}$ *subtripla subse-*
squiquarta si $\frac{4}{13}$.

DEFINITIO XLVII.

124. Denique si terminus major minorem
 aliquoties continet, ac insuper aliquot partes
 ipsius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis
 dicitur *multiplex superpartiens*. *Ratio* minoris
 inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens* Spe-
 ciatim in casu primo vocatur *dupla super-*
bipartiens tertias, si exponens $2\frac{2}{3}$, *tripla*
superquadrupartiens septimas, si exponens $3\frac{4}{7}$
 &c. in altero *subdupla, subsuperbipartiens tertias*,
 si exponens $\frac{3}{8}$ &c. e.g. ratio 25 ad 7 est
 tripla superquadrupartiens septimas; 3 ad 8
 subdupla superquadrupartiens tertias.

SCHOLIUM.

125. *Haec sunt genera & species rationum ratio-*
nalium, quarum quidem nomina apud Recentiores ra-
 rius occurrunt eorum enim loco rationum terminis
 minimis utuntur, e.g. pro *dupla* 2:1, pro *sesquialtera*
 3:2, non tamen ab eo ignorari possunt, qui scri-
 pta Mathematicorum evoluit. Adnotavit insignis suo
 aevo A. mathematicus Noster R. P. Clavius exponen-
 tes

tes, rationis maioris inaequalitatis & re, & nomine rationes autem minoris inaequalitatis, re tantum non nomine denominare. Facile verò in his nomen rationis dictae invenies, si denominaorē exponentis divides per numeratorem. e.g. Si Exponens fuerit 5 erit $8:3 = 1\frac{3}{5}$, unde innotescit rationem vocari subsupertripartientem quintas (§. 122.)

DEFINITIO XLVIII.

126. Rationes eadem sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, seu quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

127. Servit Definitio rationibus etiam irrationalium. (§. 115.)

COROLLARIUM I.

128. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet, toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet. (§. 110.)

COROLLARIUM II.

129. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit $A:B = C:D$ seu in exemplo singulari $8:4 = 6:3$ & hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus. (§. 119.)

SCHOLION II.

130. Alii signis aliis utuntur. Communiter $A.B::C.D.$ scribere solent, sed 2dum leges artis characteristicae signa scientifica non scientificis praeferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quae per characteres derivativos exprimunt ea, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.

COROL-

COROLLARIUM III.

131. Cum rationes non discernantur, nisi per exponentes (§. 119) in rationibus autem iisdem exponentes iisdem sunt (§. 126.), rationes eædem sunt etiam similes (21.) & è contra.

DEFINITIO XLIX.

132. Rationum duarum *identitas* vel *similitudo* dicitur proportio. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. e.g. Si $A : B = C : D$. dicuntur A, B, C, & D seu 8, 4, 6, & 3 proportionales.

DEFINITIO L

133. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem est cum antecedente secundæ rationis. Ex.gr. $3 : 6 = 6 : 12$. *Discreta proportio* est, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ e.g. $3 : 6 = 4 : 8$. In Proportionione continua *Terminus* qui pro antecedente primæ & pro consequente secundæ rationis ponitur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6, est medius proportionalis inter 3, & 12.

DEFINITIO LI.

134. Rationum diversarum $A : B$, & $F : G$ *major* dicitur $A : B$ si fuerit $A : B > F : G$ contra *minor* $F : G$, si $F : G < A : B$. unde & rationem minorem & maiorem hæc modo designabimus.

DEFINI-

DEFINITIO III.

135. *Ratio ex duabus vel pluribus aliis composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus, ad factum ex earundem consequentibus, Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8, & 3 ad 12. In Specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus, *triplicata* quæ ex 3bus, *quadruplicata* quæ ex 4 &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur. Ita 48: 3 est ratio duplicata ipsarum 4: 1, & 12: 3. Item 16: 1. est ipsarum 4: 1, & 4: 1. Hinc etiam intelligitur, quænam ratio dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* & in genere *submultiplicata*. Scilicet 4: 1 est ratio subduplicata ipsius 16: 1 Item 4: 1 est ipsius 48: 3. Et etiam 12: 3 est ratio subduplicata ipsius 48: 3.

THEOREMA II.

136. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem commensurabilia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas, (§. 35.), fractus verò cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 36.); Quæ igitur ut numerus rationalis ad numerum rationalem, eorum unum vel est pars aliquota alterius, vel utrinque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt. (§. 26.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

137. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum,

dum, ita unitas ad quotum (§. 61.), si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum, ut numerus rationalis ad numerum rationalem, ideoque quotus commensurabilis unitati (§. 136.) adeoque numerus rationalis.

COROLLARIUM II.

138. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numerò rationali per rationalem divisò (§. 112. 114.) rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 136.)

THEOREMA III.

139. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 26.) Quodsi adeo in casu priore quantitas minor in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in casu priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 35.) Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer ad numerum rationalem integrum. *Q. e. pr.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 26.) Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis sit (§. 34.) Incommensurabilia non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Q. erat alterum.*

COROLLARIUM I.

140. Commensurabilium ratio est rationalis, incommensurabilium irrationalis (§. 112.) adeoque & exponens illorum rationalis, horum autem irrationalis est nu-

est numerus. (§. 137.) *Dari autem quantitates incommensurabiles in Geometria demonstrabitur.*

THEOREMA IV.

141. *Rationes A:B & C:D similes eidem tertiæ F:G. sunt etiam similes inter se. Item similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO

$6:3 = 8:4$ (Rationes similes eidem 3tix
 $10:5 = 8:4$ (sunt etiam eadem eidem 3tix

$6:3 = 10:5$ (§. 131.) Quare cum sit $A:B = F:G$. & $C:D = F:G$. erit $A:B = C:D$ (§. 77.) Quod erat unum.

Item $A:B = C:D$, & $F:G = H:E$ & $C:D = H:E$ per hypoth: sed $A:B = H:E$ per demonstrata. Ergo etiam $A:B = F:G$ per Demonstr: Quod erat alterum.

THEOREMA V.

142. *Idem C ad aequalia A & B, & aequalia A & B ad idem C, vel etiam ad aequalia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

143. $A = B$ per hypoth: Ergo $C:A = C:B$ (§. 84) consequenter C ad A & B eandem rationem habet.

(§. 129.) Q. erat primum.

Similiter quia $A = B$ per hypoth: erit $A:C = B:C$ (§. 84.) consequenter A ad B, & C eandem rationem habent. (§. 129.) Quod erat alterum.

Sit denique $A = C$, & $B = D$ Erit $A:B = C:D$ (§. 84.) & ratio eadem (§. 129.) Quod erat 3tium.

THEOREMA VI.

144. Si fuerit $A:B = C:D$ erit etiam invertendo $B:A = D:C$.

DEMONSTRATIO.

Sit exponens ipsius $A:B = E$, & ipsius $C:D = G$. erit per hypoth: $G = E$. Sed $B:A = 1:G$ &

D

$D:C = 11:E$ (§. 61.) Ergo $B:A = D:C$ (§. 141.)
Q. e. d.

THEOREMA VII.

145. *Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim si fieri potest P ad T aliam rationem quam p ad t; partes p & P per diversitatem rationis ad tota à se invicem discerni poterunt. Sed hoc est absurdum utpote contra, hypothefim Eo. $P:T = p:t$. *Quod erat unum.*

Si $t:p = T:P$ erit $p:t = P:T$ (§. 144.) Ergo per demonstrata P & p, sunt partes similes *Quod erat alterum.*

Si p & P sunt partes similes totorum T & t, erit $P:t = p:t$ (per num. 1.) adeoque $T:P = p:t$ (§. 144.) hoc est tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA VIII.

146. *Partes similes P & p sunt inter se ut tota. T & t.*

DEMONSTRATIO.

Totum est idem cum partibus suis simul sumptis. (§. 8.) Ergo quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet e. g. quarta, 6ta, vigesima &c.

Sed si sumatur totum minus t toties, donec toti majori T æquale fiat, sumetur etiam pars minor p toties, donec parti majori P simili æqualis fiat; toties itaque P continebit p, quoties T ipsum t. sunt ergo partes similes ut tota. (§. 131.) *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

147. *Notandum est, numerum qui indicat quoties sumatur*

sumatur totum minus, ut majori aequale fiat, non semper esse rationalem, sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent. e.g. In Geometria demonstrabimus latus quadrati ut diagonali aequale fiat, toties sumi debet, quoties unitas continetur in radice ex duobus. Quodsi latus quadrati dividatur in 2 partes, quarum una est pars quarta totius, altera tres quartas continet; tum quoties unitas continetur in radice ex binario, toties etiam sumi debet pars quarta lateris quadrati, ut parti quartae diagonalis aequalis fiat.

THEOREMA IX.

148. Si $A:B = C:D$; erit etiam alternando seu permutando $A:C = B:D$.

DEMONSTRATIO.

I. Si Antecedentes A & C minores fuerint consequentibus B, & D, eorum partes. (§. 18.) eaque similes sunt. (§. 145.) Sunt itaque ut tota; hoc est $A:C = B:D$. (§. 146.)

II. Si Antecedentes A & C majores sint consequentibus B & D, tum quia $A:B = C:D$ per hyp: erit $B:A = D:C$; (§. 144.) consequenter $B:D = A:C$. per casum I. Q.e.d.

COROLLARIUM I.

149. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum. (§. 61.)

COROLLARIUM II.

150. Si fuerit $A:B = C:D$ & $B = D$. erit etiam $A = C$. Est enim $A:C = B:D$ (§. 148.) sed $B = D$, Eo etiam $A = C$.

COROLLARIUM III.

151. Si fuerit $B:A = D:C$ & $B = D$ erit etiam $A = C$. cum enim sit $A:B = C:D$ (§. 144.) erit etiam $A = C$ (§. 140.)

THEO-

THEOREMA X.

152. *Quae ad idem vel aequalia eandem habent rationem aequalia sunt; & ad quae idem vel aequalia eandem habent rationem ea itidem aequalia sunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:B = D:B$. per hyp: Ergo $A:D = B:B$. (§. 148.)
 sed $B = B$, Quare $A = D$. (§. 126.) fit $A:B = D:C$; & $B = C$, Ergo $A:D = B:C$ (§. 148.) sed
 per hypoth: $B = C$; Quare $A = D$ (§. 126.) Q.
 erat unum.

Similiter $C:A = C:B$ per hypoth: Ergo $C:C = A:B$. (§. 148.) sed $C = C$ Quare $A = B$ (§. 126.) fit
 $C:A = D:B$ & $C = D$ Ergo $C:D = A:B$. (§. 148.)
 sed per hypoth: $C = D$ Quare $A = B$ (§. 126.)
 Quod erat alterum.

THEOREMA XI.

153. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices facta D & E, sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

A.	B.	1: C = A: D.
2.	4.	
C 3.	3	1: C = B: E. (§. 58.)
D 6	12. E.	Ergo $A:D = B:E$ (§. 141.)
2: 4 = 6: 12		Quare $A:B = D:E$ (§. 148.)

Q. e. d.

COROLLARIUM.

154. Ergo si $A > B$ etiam $AC > BC$ (§. 126.)
 hoc est; si majus & minus per idem vel aequalia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XII.

156. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas, quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} 24 : 12 \\ 3 \overline{) 8 : 4} \end{array} \quad 1 : C = F : A$$

$$1 : C = G : B. (\S. 149.) \text{ Ergo}$$

$$8 : 4 = 24 : 12 (F : A = G : B. (\S. 141.) \text{ conse-}$$

$$\text{quenter } F : G = A : B. (\S. 138.) \text{ Q.e.d.}$$

COROLLARIUM.

156. Si $A > B$, etiam $F > G$, hoc est, si majus & minus per idem vel aequalia dividas quotus prior posteriore major est

THEOREMA XIII.

157. Si rationum similium $A : B$, & $C : D$ tam antecedens quam consequens unius rationis $A : B$ multiplicetur, vel dividatur per idem E , in priori casu facta F & G , in posteriori quoti H & I cum C & D eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam F & G sunt facta ipsarum A & E item B & E per hypoth: erit $A : B = F : G$ (§. 153.); sed etiam $A : B = C : D$ per hypoth: Ergo $F : G = C : D$ (§. 141.) Q.e.primum.

Simili modo siquidem H & I sunt quoti ex divisione ipsarum A & B per idem E per hypoth: erit $A : B = H : I$ (§. 155.) consequenter cum sit etiam $A : B = C : D$ per hypoth: erit $H : I = C : D$ (§. 141.) Q.e.alterum.

THEOREMA XIV.

158. Si rationum similium $A : B$ & $C : D$ antecedentes vel consequentes per idem E dividas, in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D ; in posteriori Antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} 3 : 6 = 12 : 24. \\ 3 \overline{) 12} \quad 3 \end{array} \quad \text{Quoniam } A : B = C : D \text{ per}$$

$$1 : 6 = 4 : 24. \quad \text{hypoth: erit } A : C = B : D$$

$$(\S. 148.) \text{ sed } A : E = F,$$

$$D \quad \& C$$

& $C : E = G$ per hypoth: Ergo $F : G = A : C$ (§. 155.) $= B : D$ (§. 141.) consequenter $F : B = G : D$ (§. 148.) Quod erat unum.

Similiter quoniam $A : B = C : D$ per hypoth: erit $A : C = B : D$ (§. 148.) sed $B : E = H$ & $D : E = K$ per hypoth: Ergo $B : D = H : K$ (§. 155.) consequenter $A : C = H : K$ (§. 141.) & hinc tandem $A : H = C : K$ (§. 148.) Quod erat alterum.

THEOREMA XV.

159. Si rationum similium $A : B$ & $C : D$ antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices in casu priore facta AE , & CE ad consequentes B & D ; in posteriore Antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO

$2 : 6 = 3 : 9$ Quia $A : B = C : D$ per hypoth: $A : C = B : D$ (§. 148.)
 $\frac{2}{4} \quad \frac{6}{4}$

$8 : 6 = 12 : 9$ (sed $EA : EC = A : C$ (§. 153.) Ergo $EA : EC = B : D$ (§. 141.) consequenter $EA : B = EC : D$ (§. 148.) Q. e. unum.

Eodem modo quia $A : B = C : D$ per hypoth: $A : C = B : D$ (§. 148.) sed $B : D = BE : DE$ (§. 153.) Ergo $A : C = BE : DE$ (§. 141.) consequenter $A : BE = C : DE$ (§. 148.) Quod erat alterum.

THEOREMA XVI.

160. Si rationum similium $A : B$ & $C : D$ Antecedentes per idem E , & consequentes per idem F multiplices, aut dividas, in casu priore facta in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$3 : 6 = 12 : 24$ $A : B = C : D$ per hypoth:
 $\frac{3}{2} \quad \frac{6}{3} \quad \frac{12}{2} \quad \frac{24}{3}$ Ergo $EA : B = EC : D$.

$6 : 18 = 24 : 72$ (§. 159.) consequenter $EA : FB = EC : FD$. (§. cit.) Quod erat unum

3:6

$$\begin{array}{rcl} 3 : 6 & = & 12 : 24 \\ 3 : 2 & = & 3 : 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sit } A : E = G, B : F = H. \\ C : E = K \text{ \& } D : F = L. \end{array}$$

$1 : 3 = 4 : 12$ Quoniam $A : B = C : D$ per
hypoth. erit $G : B = K : D$ (§. 158.) Ergo &
 $G : H = K : L$ (§. cit.) Quod erat alterum.

THEOREMA XVII.

161. In ratione majoris inæqualitatis pars antecedentis ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens integer ad consequentem suum.

In ratione verò minoris inæqualitatis majus quodpiam antecedente ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris rationis ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D, erit $A : B > C : D$ (§. 134.) ut igitur sit æqualis prior ratio alteri, necesse est, ut minus quam A, hoc est pars ipsius (§. 18.) per B dividatur (§. 156.) quæ pars si dicatur F, erit $F : B = C : D$. id est in ratione majoris inæqualitatis pars antecedentis ad consequentem eandem rationem habet, quam minoris Antecedens ad suum. (§. 129.) Quod erat unum.

Similiter si A : B minorem habet rationem quam C ad D; erit $A : B < C : D$. (§. 139.) ut igitur ratio prior alteri sit æqualis, necesse est, ut majus quam A cujus pars est A (§. 18.) per B dividatur. (§. 156.) quod si ea dicatur F, erit $F : B = C : D$ hoc est in Ratione minoris inæqualitatis majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam antecedens majoris rationis ad suum consequentem. (§. 129.) Quod erat alterum.

THEOREMA XVIII.

162. Si fuerint quotcunque rationes similes A : B, C : D, E : F &c. Summa omnium antecedentium

$$D2. \quad A + C$$

$A + C + E$ &c. est ad summam omnium consequentium $B + D + F$ &c. ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B .

DEMONSTRATIO.

Ponamus e.g. esse $A = \frac{1}{2} B$, $C = \frac{1}{2} D$, $E = \frac{1}{2} F$ erit $A + C + E = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} F$. (§. 78.) hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium. Sed per hypoth: quilibet antecedens subduplus sui consequentis, consequenter summa omnium antecedentium ad summam consequentium ut antecedens unius rationis ad suum consequentem (§. 126.) Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, patet propositum. Q.e.d.

THEOREMA XIX.

163. Si fuerit ut totum $A + C$ ad totum $B + D$ ita ablatum C ad ablatum D ; erit etiam reliquum A ad reliquum B , ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, vel ut ablatum C ad ablatum D .

DEMONSTRATIO.

24 : 12 Aut $A : B = C : D$, aut $A : B > C :$
 6 : 3 D , aut denique $A : B < C : D$. Ergo pars
 18 : 9 ipsius A , quæ dicatur F erit ad B , ut C
 ad D (§. 161.) hoc est $F : B = C : D$ (§. 129.) consequenter
 $F + C : B + D = C : D$ (§. 162.) quare cum etiam sit $A +$
 $C : B + D = C : D$ per hypoth: erit $F + C : B + D = A + C : B +$
 D (§. 141.) & hinc $F + C = A + C$ (§. 152.) adeoque $F = A$
 (§. 81.) sed F est pars ipsius A per demonstrata. Pars igitur
 toti æqualis, quod cum sit absurdum (§. 85.) ut sit
 $A : B > C : D$ fieri non potest.

Sit jam $A : B < C : D$ Ergo majus ipso A , quod
 dicatur G , ad B eandem rationem habet, quam C ad
 D (§. 131.) hoc est $G : B = C : D$ (§. 129.) conse-
 quenter $G + C : B + D = C : D$, (§. 162.) Qua-
 re cum

re cum etiam sit $A + C : B + D = C : D$ per hypoth: erit $G + C : B + D = A + C : B + D$ (§. 141.) & hinc $G + C = A + C$ (152.) adeoque $G = A$ (§. 81.) sed A est pars ipsius G per demonstrata Ergo pars toti æqualis: quod cum sit absurdum (85.) $A : B < C : D$ esse non potest.

Quoniam itaque neque $A : B > C : D$ neque $A : B < C : D$ per demonstrata: erit utique $A : B = C : D$ consequenter $A : B = A + C : B + D$ (§. 162.) Q. e. d.

THEOREMA XX.

164. Si fuerit $A : B = C : D$ erit $A - C : B - D = A : B$ vel $C : D$. hoc est differentia antecedentium est ad differentiam consequentium, ut antecedens rationis utriusque ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO

Quoniam $A : B = C : D$ per hypoth: erit $A : C = B : D$ (§. 148.) Ponamus $A > C$ & $B > D$ erunt A & B tota; C & D eorum partes. (§. 8. 18.) Quare cum sit $A : B = C : D$ per hypoth: erit $A - C : B - D = A : B$ vel $C : D$ (§. 160.) scilicet totum est ad totum ut reliquum ad reliquum; quia totum est ad totum ut ablatum ad ablatum.

THEOREMA XXI.

165. Si fuerit $A : B = C : D$ erit componendo $A + B : B = C + D : D$ vel $A + B : A = C + D : C$. hoc est ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis, ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis 2dæ rationis ad antecedentem vel consequentem secundæ.

DEMONSTRATIO.

$4 : 2 = 10 : 5$ Si $A : B = C : D$ per hyp:
 $6 : 2 = 15 : 5$ erit $A : C = B : D$ (§. 148.)
 vel $6 : 4 = 15 : 10$ sed $A + B : C + D = B : D$
 $D_3 = A$

$\equiv A : C$ (§. 162.) Ergo $A + B : B \equiv C + D : D$
Item $A + B : A \equiv C + D : C$ (§. 148.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXII.

166 Si fuerit $A : B \equiv a : b$ & $A : C \equiv a : c$
Erit $A : A + B + C \equiv a : a + b + c$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A : B \equiv a : b$ & $A : C \equiv a : c$ per hyp:
erit $A : a \equiv B : b \equiv C : c$ (§. 148. 14.) Quare $A : a$
 $\equiv A + B + C : a + b + c$. (§. 162.) & hinc $A :$
 $A + B + C \equiv a : a + b + c$. (§. 148.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXIII.

167. Si fuerint $A : B \equiv C : D$, $E : F \equiv G : H$
 $I : K \equiv L : M$ Erit $A + E + I : B + F + K$
 $\equiv C + G + L : D + H + M$. hoc est summa omni-
um antecedentium primarum rationum est ad sum-
mam suorum consequentium, ut summa omnium ante-
cedentium secundarum rationum ad summam conse-
quentium suorum.

DEMONSTRATIO.

Cum $A : B$, $E : F$, $I : K$, &c. Itemque $C : D$, $G : H$,
 $L : M$, &c. sint rationes similes per hypoth: erit
 $A + E + I : B + F + K \equiv A : B$ & $C + G + L : D$
 $+ H + M \equiv C : D$. (§. 162.) est verò $A : B \equiv$
 $C : D$ per hyp: itaque erit $C + G + L : D + H + M$
 $\equiv A : B$. (§. 141.) Ergo $A + E + I : B + F + K \equiv$
 $C + G + L : D + H + M$. (§. cit:) *Q.e.d.*

THEOREMA XXIV.

168. Si fuerit $A : B \equiv C : D$ erit dividendo
 $A - B : B \equiv C - D : D$. Item convertendo
 $A - B : A \equiv C - D : C$. Hoc est dividendo ut
Differentia terminorum primæ rationis ad consequen-
tem, ita 2dæ rationis differentia terminorum ad su-
um. Et convertendo ut differentia terminorum primæ
rationis ad suum, ita differentia 2dæ rationis ad su-
um antecedentem.

DEMON.

D E M O N S T R A T I O.

$6 : 4 = 15 : 10$ Quoniam $A : B = C : D$
 $2 : 4 = 5 : 10$ per hypoth: $A : C = B : D$
 $2 : 6 = 5 : 15$ (§. 148.) consequenter A
 $- B : C = D = B : D = A : C$ (§. 164.) Ergo
 $A - B : B = C - D : D$. Item $A - B : A =$
 $C - D : C$. (§. 148.) Q.e.d.

T H E O R E M A XXV.

169. Si fuerit ordinatè, ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B , ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E ; & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C , ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F , erit ex æquo antecedens primæ A ad C ut antecedens 2dæ D ad F .

D E M O N S T R A T I O.

$4 : 2 = 6 : 3$ Quoniam $A : B = D : E$ &
 $2 : 8 = 3 : 12$ $B : C = E : F$ per hyp: erit
 $4 : 8 = 6 : 12$ $A : D = B : E$ & $B : E =$
 $C : F$ (§. 148.) consequenter $A : D = C : F$ (§. 141.)
 Quare $A : C = D : F$ (§. 148.) Q.e.d.

C O R O L L A R I U M I.

170. Quod si fuerit $A : B = D : E$ & $C : B = F : E$ cum etiam sit $B : C = E : F$ (§. 144.) erit $A : C = D : F$. (§. 169.)

C O R O L L A R I U M II.

171. Similiter si fuerit $A : B = C : D$ & $A : F = C : G$ cum etiam sit $B : A = D : C$ (§. 144.) erit $B : F = D : G$.

C O R O L L A R I U M III.

172. Si deniqué fuerit $A : B = C : D$ & $F : A = G : C$, cum etiam sit $A : F = C : G$ (§. 148.) erit $B : F = D : G$.

T H E O R E M A XXVI.

173. Si fuerit perturbatè ut antecedens primæ D_4 ratio-

rationis *A* ad suum consequentem *B*, ita antecedens 2^{dae} *E* ad suum consequentem *F*, & ut consequens primæ *B* ad aliud quidpiam *C*, ita aliud quidpiam *D* ad antecedentem secundæ *E*; erit etiam ex æquo Antecedens primæ *A* ad *C* ut *D* ad consequentem 2^{dae} *F*.

DEMONSTRATIO.

$8 : 4 = 12 : 6$ Quoniam $A : B = E : F$ per
 $4 : 16 = 3 : 12$ hyp: si ponatur $B : C = F : G$

$8 : 16 = 3 : 6$ erit $A : C = E : G$. (§. 169.)

Est verò etiam $B : C = D : E$ per hypoth: Ergo
 $D : E = F : G$ (§. 141.) & $D : F = E : G$. (§. 148.)
 consequenter $A : C = D : F$. (§. 141.) Q.e.d.

COROLLARIUM I.

174. Quod si fuerit $A : B = E : F$ & $C : B = E : D$ cum etiam sit $B : C = D : E$ (§. 144.) erit
 $A : C = D : F$. (§. 173.)

COROLLARIUM II.

175. Similiter si fuerit $B : A = F : E$ & $B : C = D : E$ cum etiam sit $A : B = E : F$. (§. 144.) erit
 $A : C = D : F$. (§. 173.)

COROLLARIUM III.

176. Si porro fuerit $B : A = F : E$ & $C : B = E : D$, cum sit etiam $B : C = D : E$ (§. 144.) erit
 $A : C = D : F$. (§. 175.)

COROLLARIUM IV.

177. Si idem *C* vel æquali per majus *A* & minus *B* dividas, quotus prior *F*, erit minor posteriore *G*. Est enim $1 : A = F : C$ & $1 : B = G : C$ (§. 149.) adeoque $A : B = G : F$ (§. 175.) sed $A > B$ per hypoth: Ergo $G > F$ (§. 126.)

AXIOMA XI.

178. Majus ad idem majorem rationem habet quam minus ex.gr. $8 : 2 > 4 : 2$.

AXIO-

A X I O M A XII.

179. Quod ad idem majorem rationem habet quam alterum, id altero majus est. e.g. $8:2 > 4:2$ itaque $8 > 4$.

A X I O M A XIII.

180. Idem ad majus minorem rationem habet, quàm ad minus. e.g. $16:4 < 16:2$.

T H E O R E M A XXVII.

181. Ad quod idem majorem rationem habet, quàm ad alterum, id altero minus est.

D E M O N S T R A T I O.

$8:2 > 8:4$ Habeat C ad A rationem majorem quam ad B, per hypoth.

$$2 < 4$$

Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B. (§. 161.) hoc est $D:A = C:B$ (§. 129.) & hinc $D:C = A:B$ (§. 148.) sed $D < C$ (§. 18.) Ergo $A < B$. (§. 126.) Q.e.d.

T H E O R E M A XXVIII.

182. Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum producant.

D E M O N S T R A T I O.

Sint duo factores A & B. erit $1:A = B:AB$ & $1:B = A:BA$ (§. 58.) est verò etiam $1:A = B:BA$ (§. 148.) adeoque $B:AB = B:BA$. (§. 141.) Ergo $AB = BA$ (§. 152.) Q.e.d.

C O R O L L A R I U M.

183. Sint tres factores A, B & C Quoniam $AB = BA$ (§. 182.) erit $CAB = CBA$ (§. 83.) adeoque & $ABC = BAC$ (§. 182.) Similiter quia $CB = BC$ (§. 182.) erit $ACB = ABC$. (§. 83.) adeoque & $CBA = BCA$ (§. 171.) Quare $CAB = CBA = ABC = ACB = BAC = BCA$ (§. 77.) hoc est factum idem producit, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

Ita $3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$. THE-

THEOREMA XXIX.

184. Si factum AB per multiplicandum A dividitur, quotus C est multiplicans; si per multiplicantem B : quotus D est multiplicandus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam multiplicandus A factum AB , & multiplicans B , quotus C per hypoth: erit $A : AB = 1 : B$ (§. 58.) & siquidem AB dividitur etiam per A per hypoth: $A : AB = 1 : C$ (§. 61.) consequenter $1 : B = 1 : C$ (§. 141.) Ergo $B = C$ (§. 152.) Q. e. unum.

Similiter siquidem multiplicans B , factum AB , multiplicandus A , quotus D , per hypoth: erit $1 : A = B : BA$ (§. 58.) & quoniam AB dividitur per B per hypoth: erit etiam $1 : D = B : BA$ (§. 61.) consequenter $1 : A = 1 : D$ (§. 141.) Ergo $A = D$ (§. 152.) Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

185. Omnia itaque facta sunt numeri compositi. (§. 68.)

THEOREMA XXX.

186. Si quotus B per divisorem A aut contra multiplicetur; factum AB est dividendus CD .

DEMONSTRATIO.

Quoniam B quotus, A divisor, factum AB , dividendus CD per hypoth: erit $1 : A = B : CD$ (§. 149.) & $1 : A = B : AB$ (§. 58.) proinde $B : CD = B : AB$ (§. 141.) consequenter $CD = AB$ (§. 152.) Quod erat unum.

Idem verò cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur, (§. 182.) Erit alterum.

THEOREMA XXXI.

187. Si quatuor quascunque quantitates proportionales $A : B = C : D$ per alias quatuor $E : F = G : H$ singulas per singulas multiplices, facta inter se proportionalia sunt, nempe $AE : FB = GC : DH$.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum sit per hypoth:

$$A : B = C : D \text{ \& } E : F = G : H.$$

$$E : F = E : F \text{ \& } C : D = C : D.$$

$$\text{Erit } EA : FB = EC : DF \text{ \& } CE : FD = CG : DH$$

(§. 160.) sed $EC = CE$ & $DF = FD$ (§. 182.)

$$\text{Ergo } EA : FB = CG : DH. (\S. 141.) \text{ Q. e. d.}$$

THEOREMA XXXII.

188. *Rationis compositae exponens est aequalis facto exponentium simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Sit rationis primae $A : B$ exponens $= m$ secundae

$C : D$ exponens sit $= n$. erit $m : 1 = A : B$ & $n : 1 =$

$C : D$ (§. 149. 148.) Ergo $mn : 1 = AC : BD$.

(§. 187.) consequenter mn est exponens rationis AC

: BD (§. 126. 116.) hoc est compositae ex $A : B$ & $C : D$

(§. 135.) Q. e. d. SCHOLION

189. *Sint rationes $8 : 4$ & $24 : 6$: Illius exponens*

est 2, huius 4. Rationem compositam datarum habent

192 & 24 . sed $192 : 24 = 8$, quod est factum ex 2

in 4. Caeterum eadem demonstratio locum habet, si

plures fuerint rationes.

THEOREMA XXXIII.

190. *Si plures fuerint quantitates continuè pro-*

portionales A, B, C, D &c; prima A ad tertiam C

est in ratione duplicata, ad quartam D in ratione

triplicata &c. primae A ad secundam B .

DEMONSTRATIO.

I. Quoniam $A : B = B : C$ per hypoth: AB ad BC

rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 135.)

sed $AB : BC = A : C$. (§. 155.) Ergo etiam A ad

C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 141.)

II. Quoniam $A : B = B : C = C : D$ per hypoth:

ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B ;

(§. 135.) sed $ABC : BCD = A : D$ (§. 155.) Ergo

etiam

etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A : B.
(§. 141.) *Quod erat alterum.*

III. Facile apparet quod eodem modo demonstrari possit primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam, ad sextum quinduplicatam &c. primi ad secundum *Quod erat tertium.*

THEOREMA XXXIV.

191. Si fuerit quaecunque quantitatum A, B, C, D, E, F series, ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus extremis quantitatum interjacentium. A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c. (§. 135.) sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 155.) Ergo etiam A : F est in ratione composita omnium modò recensitarum (§. 141.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXXV.

192. Rationes compositæ ex rationibus quarum singulæ singulis æquales, inter se æquales sunt.

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 4 : 2 Sit A : B = C : D & E : F =
3 : 1 = 12 : 4 G : H, I : K = L : M per hyp:
5 : 1 = 20 : 4 erit AE : BF = CG : DH. (§. 187.)
90 : 3 = 960 : 32 adeoque & AEI : BFK = CGL :
DHM (§. cit.) Ratio verò AEI : BFK componitur
ex rationibus A : B, E : F, & I : K ratio CGL : DHM
ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 135.) Ergo
constat propositum, *Q.e.d.*

CAPUT

CAPUT IV.

De speciebus Arithmeticae in numeris fractionis.

THEOREMA XXXVI.

193. Si numerator est aequalis denominatori: fractio $\frac{4}{4}$ aequivalet integro: si minor; fractio $\frac{2}{4}$ minor est integro: si major: fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem, seu integrum in partes aequales (e.g. in nostro casu in $\frac{1}{4}$) divitum & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas. (§. 51) Quodsi ergo numerator denominatori aequalis per hypoth: tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro aequalis. (§. 85.) Quod erat primum.

Si numerator denominatore minor, per hypoth: aliquot saltem dantur partes integri non omnes (§. 18.) Ergo fractio tantum aliquot partibus integri aequalis consequenter eadem minor (§. cit.) Q. e. secundum,

Si denique numerator major est denominatore per hypoth: plures dantur partes, quam habet integrum, (§. 18.) sed tot partes quod habet integrum integro aequales sunt, (§. 85.) Ergo integrum parti fractionis aequale est, consequenter ipsa integro major, (§. 18.) Quod erat tertium.

SCHOLIUM.

194. Fractiones integro aequales, vel eodem majores, dicuntur vulgò spuriae; quia propriè loquendo fractiones non sunt, nisi quae integro minores (§. 33.)

PROBLEMA XI.

195. Invenire quot integra fractio $\frac{8}{4}$ quae integro major est, contineat.

RESO-

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: quotus 2 indicabit quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur. (§. 61.) Sed denominator idem est cum integro (§. 51.) Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

196. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.

II. Factum scribatur loco numeratoris.

Ita reperiēs $3 \frac{24}{8}$; $5 \frac{30}{6}$, $7 \frac{28}{4}$

DEMONSTRATIO.

Est factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 58. 144.) sed integrum ad unitatem æquale integro, (§. 116.) Ergo factum ad denominatorem, hoc est fractio (§. 108.) æqualis est integro (§. 126.) *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

197. *Fractiões homogeneæ æquales sunt quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent. Major est, cujus numerator habet rationem majorem; minor verò, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ per hyp: ad eandem unitatem referuntur, (§. 30.) adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 51.) Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent fractiones æquales sunt (§. 152)
cujus

cujus verò fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est, cujus numerator minorem habet, ea minor est. (§. 179.)
Q.e.d.

Ex: gr: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$

S C H O L I O N.

198. *Intelligitur autem identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries contineatur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo; id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

C O R O L L A R I U M.

199. Quodsi ergo tam numerator quam denominator alicujus fractionis $\frac{4}{6}$ per eundem numerum

(2) multiplicetur vel dividatur; in casu priore facta $\frac{8}{12}$ in posteriore quoti $\frac{2}{3}$ constituunt fractionem datæ $\frac{4}{6}$ æquivalentem (§. 153. 155. 197.)

P R O B L E M A XIII.

200. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

R E S O L U T I O.

I. Dividatur numerus major per minorem.

II. Divisor primæ divisionis, seu numerus datus minor denuo dividatur per residuum primæ divisionis.

III. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum. *Ex: gr: Sint numeri dati 168 & 240. reperietur eorum communis mensura hunc in modum.*

$$\begin{array}{r}
 168 \text{) } 240. \text{ (1. Prima divisio.} \\
 \underline{168} \\
 -72 \text{ Residuum primæ divisionis} \\
 72 \text{) } 168 \text{ (2. Secunda divisio.} \\
 \underline{144} \\
 24 \text{ Residuum secundæ divisionis:} \\
 24 \text{) } 72 \text{ (3 Tertia divisio} \\
 \underline{72} \\
 00
 \end{array}$$

Similiter mensura communis maxima numerorum 95 & 47. reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Divisor ultimus 24 metitur divisorem antecedentis (in nostro quidem casu secundæ) divisionis *per hypoth:* & (§. 66.) Ergo metitur & dividendum antecedentis (hoc est in nostro casu secundæ) divisionis 168. utpote ex dividendo ultimæ divisionis 72 aliquoties (hic quidem bis) sumpto & ejus divisore 24 compositum. Metitur adeo numerum unum datorum 168. & etiam metitur residuum primæ divisionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240 utpote ex minore 168 aliquoties (in nostro casu semel) sumpto, & residuo primæ divisionis 72 compositum metitur. Est itaque 24 in nostro casu communis numerorum datorum 168 & 240 mensura (§. 70.) Quod etiam numerus 24 sit mensura maxima numerorum datorum ordine retrogrado per indire-

indirectum demonstratur, si enim ponatur major aliquis quam 24 numerus communis mensura numerorum datorum 240 & 168, metietur etiam mensuram communem in nostro casu 24, ut patet ex antecedentibus, sed numerus is eadem mensura 24 major est per hypothesin. Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod omnino sit absurdum (§. 66.) major communis mensura non datur. Est igitur ea quam invenimus maxima. Q.e.d.

SCHOLIUM I.

201. Qui demonstrationem uno quasi obtutu comprehendere cupiunt, illos haec numerorum datorum resolutio juvabit.

I. $72 \div 3 = 24$ per divisionem tertiam.

II. $168 \div 2 = 84$ per divis. sec. $= 2 \cdot 3 \cdot 24$

$24 + 24$ per num. 1, $= 7 \cdot 24$

III. $240 \div 1 = 240$ per divis. prim. $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$ per num. 1 & 3 $= 10 \cdot 24$

SCHOLIUM II.

202. In lineis communis mensurae maximae inveni-

240	96	48	tur per mutuam divisionem & se
168	72	24	in vicem subtractionem. Invenie-
72	24	24	ris autem compendii gratia di-
96	48	00	visio subtractioni substituitur: ut

exemplum ostendit.

PROBLEMA XIV.

203. Fractionem datam ad minores terminos re-

ducere: hoc est invenire fractionem datae $\frac{20}{43}$ aequivalentem sed minoribus numeris expressam.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 43. per eundem numerum 4, qui utrumque metitur,

E quoti

quoti 5 & 12 componunt fractionem quaesitam $\frac{5}{12}$
(§. 199.)

COROLLARIUM I.

204. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 200.) fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

205. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci non potest.

PROBLEMA XV.

206. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, hoc est, invenire fractiones, quæ datis æquales sunt, & communem denominatorem habeant.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duæ dentur tota fractio multiplicetur per denominatorem alterius Ex: gr:

$$\frac{2}{3} \& \frac{3}{6} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} \& \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{9}{18} \& \frac{12}{18}$$

Casus II. Si plures dentur, tota quælibet fractio multiplicetur per factum ex denominatoribus reli-

$$\text{quarum fractionum ex: gr: } \frac{2}{3} \& \frac{1}{6} \& \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 4} \\ \& \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4} \& \frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{48}{72} \& \frac{12}{72} \& \frac{5}{72}$$

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem patet (§. 83. 182.) Quod verò æquivalence primum propositis manifestum est per §. 199. constat ergo propositum Q.e.d.

PROBLEMA XVI,

207. *Fractiones addere.*

I. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint

buerint, reducantur ad eundem (§. 206.)

II. Adantur numeratores, §. 86. & summæ sub-
scribatur denominator communis. Ex: gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$$= \frac{10}{15} + \frac{12}{15} (\S. 206.) = \frac{22}{15} = 1 \frac{7}{15} (\S. 195.)$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72} (\S. 206.)$$

$$= \frac{114}{72} = 1 \frac{42}{72} (\S. 185.) = 1 \frac{7}{12} (\S. 165.)$$

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum ex quibus numeratores componuntur (§. 51.) numeratores tantum adduntur. Quoniam verò addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 53.) ad eandem denominationem sunt reducendi. (§. 30.)

PROBLEMA XVII.

208. Fractionem datam ex alia data subtrahere.

RESOLUTIO.

I. Si fractiones datæ diversos habuerint denominatores reducantur ad eandem denominationem. (§. 206.)

II. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 90.) & residuo denominator communis subscribatur. Ex: gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} (\S. 203.)$

$$\& - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = - \frac{6}{10} - \frac{5}{10} (\S. 206.) = - \frac{11}{10}$$

SCHOLIUM. I.

209. Si fractio data numero integro addenda aut ab illo subtrahenda, numerus integer redigitur ad fractionem adjectâ ipsi pro denominatore unitate: (§. 194.) Reliqua sunt juxta resolutionem Problematis XVI. & XVII. Ex: gr. Sit numero 2. addenda

E2 fractio

fractio $\frac{2}{3}$, poterit vel ita addi, $2 + \frac{2}{3}$, vel reducendo ad fractum $\frac{2}{1}$ dein ad communem denominatorem cum fractione data $\frac{2}{3} = \frac{6}{3}$ eritque $\frac{2}{1} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3}$ (§. 206.) $= \frac{8}{3}$ (§. 207.) $= 2 + \frac{2}{3}$ (§. 195.)

Similiter si à numero 2 subtrahenda fractio $\frac{2}{3}$, erit $2 = \frac{2}{1}$ tandem $= \frac{6}{3}$ (§. 206.) itaque $\frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ (§. 208.) $= 1 + \frac{1}{3}$ (§. 195.)

PROBLEMA XVIII.

210. *Fractionem per fractionem aliam multiplicare.*

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius, facta constituunt fractionem quæsitam.

Ex: gr: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 203.)

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A(2)}{B(3)} = A:B$ (§. 63.) $= F \& \frac{C(1)}{D(2)}$
 $= C:D$ (§. cit.) $= G$. erit $B:A = 1:F$ &
 $D:C = 1:G$ (§. 61.) Ergo $BD:AC = 1:FG$
 (§. 187.) & $AC:BD = FG:1$ (§. 144.) hoc est
 $\frac{AC(2.1)}{BD(3.2)} = \frac{FG}{1}$ (§. 63.) $= FG \left(\frac{2}{6} \right)$
 (§. 61.) Q. e. d.

SCHIO-

SCHOLION. I.

211. Non mirum, quod factum factoribus minis, cum re vera divisio sit, quae multiplicatio vocatur. Ex: g:

$\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem est, ac invenire dimidium duarum partium, tertiarum.

SCHOLION II.

Si integer 2 in $\frac{3}{7}$ ducendus est, solus numerator

3 per 2 multiplicandus, eritque $\frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$

PROBLEMA XIX.

212. Fractionem $\frac{A \left(\frac{4}{5} \right)}{B \left(\frac{5}{5} \right)}$ per aliam fractionem

$\frac{C \left(\frac{2}{3} \right)}{D \left(\frac{3}{3} \right)}$ dividere.

RESOLUTIO.

I. Divisor invertatur e.g. loco $\frac{C \left(\frac{2}{3} \right)}{D \left(\frac{3}{3} \right)}$ scribe $\frac{D}{C}$

$\left(\frac{3}{2} \right)$

II. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 210.)

quod prodit $\frac{AD(12)}{BC(10)}$ seu $1 \frac{1}{5}$ (§. 195.) est quotus

quæsitus; qui fit $\frac{AD}{BC}$

DEMONSTRATIO.

Siquidem divisor ad dividendum, ut auctas ad quotum (§. 61.) erit etiam dividendus ad divisorem, ut quotus ad unitatem (§. 144.) Quod si fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 226.) & pro quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem fiat, (§. 63.) erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem fractionis

E3

tionis

tionis dividendi ut fractio dividenda ad fractionem dividendam, hoc est $AD : BC = \frac{AD \cdot BC}{BD \cdot BD}$ (§. 155.)

sed etiam $\frac{AD \cdot BC}{BD \cdot BD} = G : I$ (§. 61. & 144.) consequenter $AD : BC = G : I$ (§. 141.) hoc est $\frac{AD}{BC} = \frac{G}{I}$ (§. 63.) $= G$ (§. 100.); id est, si fractio per fractionem dividenda, divisor invertatur & inversus ducatur in dividendum (§. 210.) Q. e. d.

S C H O L I O N.

213. Neque verò mirum est, quod quoti numeri integri esse possint, una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeò cum fractiones sint rationes (§. 108.) eas dividere idem esse, ac rationum rationes investigare.

P R O B L E M A XX.

214. Integrum (3) per fractionem $\left(\frac{4}{7}\right)$ dividere

R E S O L U T I O.

I. Divisor invertatur ut in Problem: præcedente.

II. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7. divisoris inversi.

III. Facto subscribatur ejusdem denominator 4

quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5 \frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

D E M O N S T R A T I O

Eadem est cum demonstratione Problematis præcedentis (§. 212.)

P R O B L E M A XXI.

215. Integrum cum fracto $12 \frac{3}{4}$ per integrum

cum fracto $3 \frac{5}{6}$ dividere.

RESO-

R E S O L U T I O.

I. Reducatur uterque datorum ad eandem denominationem seorsim (§. 196.) ut sit $3\frac{5}{6} = \frac{18}{6} +$

$$\frac{5}{6} \& 2\frac{3}{4} = \frac{48}{4} + \frac{3}{4}$$

II. Siquidem sunt homogenei (§. 30.) seorsim sibi addantur (§. 207.) ut sit $\frac{48}{4} + \frac{3}{4} = \frac{51}{4} \& \frac{18}{6} +$

$$\frac{5}{6} = \frac{23}{6}$$

III. Reliqua omnia fiant ut §. 212. & invenietur quotus $\frac{306}{92}$ (§. cit:) $= 3\frac{30}{92}$ (§. 195.)

$$= 3\frac{15}{46} \text{ (§. 199.)}$$

S C H O L I O N I.

216. Passim dicitur Ex: gr: florenos per florenos, grossos per grossos multiplicari ac dividi, sed hic vulgi sensus est: multiplicatio autem & divisio non requirit, ut sint quantitates aut numeri homogenei (§. 62.) In divisione equidem potest considerari divisor ut pars dividendi, atque dividendo homogeneus, sed tum quotus qui indicat quoties pars ista ex suo toto auferri potest, neque diviso nec divisi est homogeneus. Multiplicatio verò cum sit inventio numeri, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero (§. 59.) evidens est, eam non numeros homogeneos, sed numeros unum numeratum, alterum numerantem respicere (§. 29.) Hinc dissolvitur illud sophisma. Floreni duo aequivalent 60 grossis. & etiam floreni 2, grossis 60 etiam aequales sunt: floreni tamen 2 per florenos 2 multiplicati faciunt florenos 4, grossi autem 60 per grossos 60 multiplicati

Et produ-

producunt 3600 grossos, hoc est florenos 120: cum
tamen siquidem totum est æquale omnibus suis parti-
bus simul sumptis (§. 85.) factum deberet esse æqua-
le. Sed absurdam relationem rite perspecta definitio
multiplicationis contineri prodit. Si enim floreni 2, &
ipsis æquales grossi 60 toties ponantur quanties milles
in duobus continetur, hoc est bis. 120. Jam, floreni
 $4 = 120$ grossorum factio: utique $= 4$ florenis.

SCHOLIUM.

217. Exponitur subinde in Arithmetica Additio,
Subtractio, Multiplicatio, Divisio linearum, siue geo-
metrica; verum si lineæ ad unitatem quandam seu men-
suram aliquam referantur (§. 9. & 10.) tam dictæ speci-
es quatuor eodem modo quo numeri quicunque tra-
hantur; videlicet ita sibi addentur, subtrahentur &c. & tunc
lineam in lineam ducere idem erit ac lineæ unius par-
tes siue numerum per lineæ alterius partes, si-
ve numerum multiplicare. Sed quoniam per lineam
in lineam angulo recto insistentem area oritur, cuius
contemplatio ad geometriam spectat, ejusmodi multi-
plicationem, uti & ipsarum Arearum additionem sub-
tractionem, divisionem eidem geometriæ reservamus.

CAPUT V.

De potentiis numerorum, Genesi præsertim ac
Analyti numerorum quadratorum & cubicorum.

DEFINITIO LIII.

218. Si numerus quicunque 2 in se ipsum
ducatur; factum 4 Numerus Quadratus ipse au-
tem intuitu hujus Radix Quadrata appellatur

COROLLARIUM.

219. Cum sit ut unitas ad radicem quadratam ita
radix ad ipsum quadratum (§. 58. 218.) erit radix
media proportionalis inter unitatem & quadratum
(§. 133.)

DEFI-

DEFINITIO LIV.

220. Si numerus quadratus 4 itidem per radicem 2 multiplicetur, factum 8 dicitur numerus cubicus, seu cubus, & radix 2. ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

221. Cum sit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 58. 218.) & ut unitas ad radicem ita quadratum ad cubum (§. 58. 220.) erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 141.) hoc est unitas, radix quadratum & cubus in continua proportionem sunt (§. 133.) & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO LV.

222. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum possit fieri, inde facta orta generali nomine *Potestates, Potentie, dignitates* appellantur.

DEFINITIO LVI.

223. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati est 2, cubi 3. (§. 218. 220.)

DEFINITIO LVII.

224. Omnes ferme hodie distinguunt dignitates optimè per exponentes ita, ut Radix dicatur, *Dignitas 1ma*. Quadratum *Dignitas 2da*, cubus *3tia* &c. Qui Arabes sequuntur

tur, singulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum Diophanto (a) utuntur Vieta (b) & Oughtredus (c) Nomina Arabum sunt: Radix, quadratum, cubus, quadratoquadratum, seu biquadratum, surdesolidum, quadratum cubi, surdesolidum secundum &c.

Multi quadratum vocant *Zensum* Hinc composita: *Zensifensus* *zensicubus*, *Zensizenzensus* *zensurdesolidus* &c.

HYPOTHESIS XIII.

225. Qui Arabum denominationes retinent, potentiarum signis sequentibus utuntur.

I.R. 2.3. 3.C. 4.33. 5.6 &c.

Multo commodius Cartesius (d) Radici superius à dextris jungit exponentem.

Ex: gr: Si a fuerit radix, erunt potentie ipsam sequentes a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , a^6 , &c. vel si $a = 2^2$, 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , &c. ita ut sit $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. &c.

DEFINITIO LVIII.

226. Quantitatem ad dignitatem desideratam evehere idem est, ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. Ex: gr: 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est, ac invenire factum 8, cujus factores 2.2.2.

DEFI-

(a) In libris Arithmeticoꝝ.

(b) In Isagoge in artem Analit: c. 3.

(c) In clove Mathemat: c. 12.

(d) In Geometria.

DEFINITIO LIX.

227. Ex dignitate data *radicem extrahere.*
vel *latus educere* idem est ac invenire nume-
rum 2, qui aliquoties in se ipsum ductus da-
tam potentiam (ex:gr: tertiam) 8 producit.

SCHOLIUM

228. Cum dignitates superiores non nisi in *Analysi*
usum habeant, in presenti *genesis* & *Analysin* qua-
dratorum & cuborum tantum tradimus. Radices ve-
rò quadratas ac, cubicas extrahiturus omnium unita-
tum quadratos & cubicos numeros nosse debet, quos
sequens tabula exhibet.

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LX.

229. *Radix* tam quadrata, quam cubica aut
dignitatis superioris cujuscunque dicitur *Bi-*
nomia, si ex duabus: *Trinomia*, si ex tribus:
Multinomia, si ex pluribus,
quàm duabus partibus constet.

THEOREMA XXXVIII.

230. *Potentiae ejusdem gradus sunt in ratione*
tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens
earundem: hoc est; Quadrata habent rationem dupli-
catam, cubi triplicatam: Quadrato-quadrata qua-
druplicatam &c. rationem suarum radicum.

DEMONSTRATIO.

Potentiae prodeunt, si radices A & B aliquoties in
se ipsas ducas (§. 222.) Quare cum ea sem radix

A ad

A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, reliquarum potenciarum ex tot rationibus similibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam &c. cæteræ potentie rationē tantaplicatam suarum radicū, quot unitates habet exponens earundē. (§. 135. 226.)

Q. e. d. THEOREMA XXXIX.

231. *Quantitatum proportionalium, Potentie eadem sunt proportionales. Hoc est si radices sint proportionales, erunt etiam quadrata, cubi &c. proportionalia.* DEMONSTRATIO.

Potentie eadem habent rationem multiplicatam ipsarum $A : B, B : C, C : D, D : E$ &c. vel $A : B, C : D, E : F$ &c. (§. 230.) sed hæ rationes omnes inter se eadem sunt *per sumptā*: Ergo potentie istæ e.g. A^2, B^2, C^2, D^2, E^2 &c. constituunt rationes compositas ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt (§. 222.) consequenter easdem, (§. 192.) atque adeo proportionales (§. 132.) Q. e. d.

THEOREMA XL.

232. *Numerus quadratus radicalis binomiae, componitur ex quadrato partis primæ, ex facto duplo primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Numerus quadratus prodit, si radix in se ipsam ducitur; (§. 218.) utraq; verò pars radicis sigillatim ducitur in utramque simul (§. 97.) Quare, productum componi debet imò ex facto partis primæ in se ipsa hoc e. te quadrato partis imæ (§. 218.) 2do ex facto partis imæ in secundam & ex facto 2dæ in primam, hoc

hoc est ex duplo facto imæ in secundâ (§. 182. 183.) 3tio
denique ex facto partis 2dæ in 3to, hoc est ex qua-
drato partis 2dæ (§. 218.) &c. &c.

SCHOLIUM I.

233. Demonstratio est ocularis, si in quocunque e-
xemplo singulari multiplicativ non aliu peragitur, sed
indicatur quo in casu pro exemplo universalis est in
eum ferre modum quo figurae in geometria sunt; e.g.
Sit radix binomia $34 = 30 + 4$; erit

$30 + 4$. Radix binomia.

$30 + 4$.

16 Quadratum partis II.

120 Facta ex I. in II.

120

900 Quadratum partis I.

1156 Quadratum totius.

Insigne hoc artificium vires imaginationis mirè ex-
tendit, Et intellectum juvat cum in demonstrationibus
concipiendis, tum in propriis inveniendis.

COROLLARIUM I.

234. Cum parte dextrâ sive secundâ unitates, par-
te sinistra sive primâ decades scribantur (§. 44.)
quadratum partis secundæ in loco dextimo, factum
duplum unius in alteram in loco secundo. Quadratum
denique partis imæ in tertio loco à dextimo ponendum.
(§. 43.)

SCHOLIUM II.

235. Scilicet quadratum partis dextimæ nullam
adjunctam habet cyphram, duplo facto ex parte una
in alteram, cyphra una; quadrato autem partis fini-
sime cyphrae junguntur, ut numeri solitarie positi
justum locum occupent (§. 43.)

COROL-

COROLLARIUM II.

236. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures sinistimæ habeantur pro una & etiam patebit, quadratum numeri cuiuscunque componi ex quadratis singularum partium, & ex factis duplis cuiuscunque partis in omnes ipsa hac parte sinistiores, ut addeò Theorema unum compositioni omnium numerorum quadratorum sufficiat.

SCHOLIUM III.

237. Sit radix 346, sumatur 340 pro parte una, & 6 pro altera erit. (§. 232.)

$$340 + 6$$

$$340 + 6$$

$$36$$

Quadratum partis III.

$$2040$$

Facta ex parte III in I & II partem simul.

$$2040$$

$$1600$$

Quadratum partis II.

$$12000$$

$$12000$$

Facta ex parte I in II.

$$90000$$

Quadratum partis I.

$$119716$$

Quadratum totius.

COROLLARIUM III.

238. Quò in loco singula producta ponenda ex corollario primo, & ejus scholio intelligitur (§. 234. 235.) Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur ut sibi debitum locum occupent. (§. 43.)

SCHOLIUM IV.

239. Extractio radicis quadratæ aliàs taedii plena, facillima evadit, ubi quadratis per Theorema præfens componendis operam prius dederis.

THEOREMA XXII.

240. Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Numerus propositus distingvatur in classes, duas notas classi unicuique assignando initiò à dextra facto. Tot enim erunt partes radices, quot classes habentur (§. 218. 236.) Notandum autem quod classi finitimæ subinde nonnisi nota una relinquatur. (§. 218.)

II. Cum in classe finitima reperiatur quadratum notæ finitimæ radices (§. cit:) in *Tabula radicum* (§. 228.) quæratnr numerus ei vel æqualis, vel proximè minor, & ex ipso subtrahatur; radix verò ejus post lunulam scribatur.

III. Quoti inventi duplum pro divisore ponatur ad latus subsequentis classis cum priore si quod fuerat residuo. Tum in duabus notis finitimis inquiratur novus quotus per *Abacum Pythagoricum* (§. 95.) inventusquæ post lunulam scribatur: est enim pars 2da radices (§. 232. 184.)

IV. Summa quadrati radices, & facti ejusdem radices in divisorem (§. 234.) subducatur ut in divisione fieri solet.

V. Quodsi operatio juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis classibus iteretur, prodibit radix quæsitæ (§. 236. 232.) Q. e. f. & d.

Ex: gr:	$ \begin{array}{r l} 11 & 56 \quad (34. \text{ Radix binomia.} \\ 9 & - \quad \text{Quadratum Part: I.} \\ \hline 6) 2 & 56 \\ 2 & - \\ \hline & 16 \quad \text{Dupl: F. P. I. in alt:} \\ & - \quad \text{Quadr: P. alterius.} \\ \hline & 2 \quad 56 \quad \text{Sum: Quadr: Rad: & c.} \\ \hline \end{array} $
	$ \begin{array}{l} \text{Nil. il. residui.} \\ \text{Item} \end{array} $

11	97	16	(3+6 Radicis inomia.
	9		..
6)	2	97	
	2	4	.. Duplus facti: Part. I. in alteram.
		16	.. Quadratum partis alterius.
	2	56	.. Sum: Q.R. & Fac. ejusd. R. in Divis.
68)	4	1	16
	4	0	8
			36
			16
			Sum: Quad. R. & F. ejusd. R. in D.
			0000

PROBLEMA XXIV.

241. Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractionum per fractionem multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit, (§. 210.) Quadratum autem ex facto eundem numeri in se ipsum generatur, (§. 213.) Radix itaque quadrata tam ex denominatore quam ex numeratore seorsim extrahi debet. Q. e. f. & d.

$$\text{Ita radix quadrata ex } \frac{4}{9} \text{ est } \frac{2}{3} \text{ ex } \frac{49}{144} \text{ est } \frac{7}{12}$$

COROLLARIUM I.

242. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dari reducuntur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscrubatur, (§. 196.) si numerus datus, qui quadratus non est ad fractionem reducatur cujus denominator est quadratus, & ex fractione extrahatur radix (§. 241.) fractio quæ prodit, radicem propè veram exhibet in istiusmodi partibus quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHO-

S C H O L I O N I.

243. Ex: gr: Sit ex 20 extrahenda radix prope vera: quae non deficiat in partibus decimis, multiplica
 20 per centum, ut prodeat fractio $\frac{2000}{100}$ - cujus radix

$\frac{44}{10}$ sive $4\frac{4}{10}$ exhibet radicem ne quidem parte decima à vera magnitudine deficientem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{10}$. Nam si fiat quadratum $16 +$

$\frac{32}{10} + \frac{16}{100}$ (§. 232.) aequale $19\frac{36}{100}$ (§. 207.) evidens est, nec unitatem ex decem deesse ad 20; Nam

$\frac{36}{100}$ est major fractio quam $\frac{1}{10}$ (§. 197. & 198.)

Similiter in alterius cujuslibet denominatoris partibus e.g. 6, 7 &c. Radix prope vera invenitur.

C O R O L L A R I U M II.

244. Quoniam numerum per articulum primarium velati 10, 100, 1000 &c. multiplicantes eidem non nisi cyphas 0, 00, 000 jungimus (§. 98.) Radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui quadratus non est, 2, 5, 6, &c. cyphas junde dextrorsum, & operationem continua: ita enim prodibit radix prope vera in partibus decimis, centesimis millesimis &c. &c. (§. 243.)

S C H O L I O N II.

245. Ex: gr: Sit extrahenda radix quadrata ex
 345 prodibit $18\frac{57}{100}$

Fractionem $18 + \frac{57}{100}$

$$\begin{array}{r}
 345 \text{ (18 } \frac{57}{100} \\
 \hline
 1 \\
 2) \overline{245} \\
 \underline{16} \\
 64 \\
 \underline{224} \\
 36) \overline{2100} \\
 \underline{180} \\
 25 \\
 \underline{1825} \\
 370) \overline{27500} \\
 \underline{2590} \\
 49 \\
 \underline{25949} \\
 1551 \quad \&c.
 \end{array}$$

SCHOLION III.

246. Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus quadratus proximè minor eò, qui tres classes finisteriores occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notae

$$\begin{array}{c|c|c}
 8 & 69 & 7.5 \\
 8 & 64 & 3.6
 \end{array}
 \left(294 \frac{9}{10} \right.$$

prior es e. g. in

$$\begin{array}{r}
 588) \quad 5 \ 39 \ 00 \\
 \underline{5 \ 29} \quad 2 \\
 81 \\
 \underline{53001} \\
 899
 \end{array}$$

nostro casu 294, plures notae inveniuntur, si tabulae longius extendantur.

THEOREMA XLI.

247. Numerus cubicus radice binomiali componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primae in secundam, & ex facto tripli quadrati partis secundae in primam.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 220.) sed quadratum radice binomiae componitur ex quadratis partium, & facto duplo ex parte una in alteram (§. 232.) Quare cubus componitur ex cubo partis primae, ex triplo facto quadrati partis primae in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundae in primam; hoc est ex facto tripli quadrati partis primae in secundam & facto tripli quadrati partis secundae in primam (§. 182.) atque ex cubo partis secundae (§. 220.) *Q.e.d.*

SCHOLION I.

248. Demonstrationem ocularem denuò sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur.

Sit e.g. 34 seu $30 + 4$ erit.

$30 + 4$	Radix.
16	Quadratum partis II.
120	} Facta ex I in II.
120	
900	Quadratum partis II.
64	Cubus P. II.
480	} Facta ex quadrato II. in I.
480	
3600	Factum ex quadrato I in II.
480	Factum ex quadrato II. in I.
3600	} Facta ex quadrato I. in II.
3600	
27000	Cubus partis I.
39304	Cubus totius.

SCHOLION II.

249. Si cui subobscurior hæc Wolfii resolutio, juvabit eum hunc in modum instituta multiplicatio.

F2

Sit dicta

Sit dicta radix 34 seu 30 + 4 evehenda ad cubum: erit

$$30 + 4$$

$$\underline{30 + 4}$$

$$30 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

$$\underline{30 \cdot 30 + 30 \cdot 4}$$

$$30 \cdot 30 + 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

$$\underline{30 + 4}$$

$$30 \cdot 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$\underline{30 \cdot 30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 \cdot 4 + 30 \cdot 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 4}$$

30.

$$30.30.30 + 30.30.4 + 30.30.4 + 39.4.4$$

$$\begin{array}{r} \text{A} \text{ --- } \text{B} \text{ --- } \text{C} \text{ --- } \text{D} \text{ ---} \\ 30.30.30 + 30.30.4 + 30.30.4 + 30.30.4 + 4.4.30 + 4.4.4 \\ \text{hoc est:} \end{array}$$

$$30.30.30 + 900.4 + 900.4 + 16.30 + 16.30 + 16.30 + 4.4.4$$

$$\text{Cubus Partis I. A} \quad 27000 = 30.30.30. = 27000$$

$$\begin{array}{r} \text{Fasium tripli Quadrati B} \\ \text{Partis I. in II.} \\ \left(\begin{array}{l} 3600 \\ 3600 \\ 3600 \end{array} \right) = \begin{array}{l} 900.4 \\ 900.4 \\ 900.4 \end{array} = 10800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Fasium tripli Quadrati C} \\ \text{Partis II. in I.} \\ \left(\begin{array}{l} 480 \\ 480 \\ 480 \end{array} \right) = \begin{array}{l} 16.30 \\ 16.30 \\ 16.30 \end{array} = 1440 \end{array}$$

$$\text{Cubus Partis II. D} \quad 64 = 4.4.4 = 64$$

$$\text{Cubus totius.} \quad 39304 \quad \text{Cubus totius,} \quad 39304$$

F3.

COROL.

COROLLARIUM I.

250. Cum parte dextrâ unitates, sinistra decades scribantur, &c. (§. 44.) Numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato partis sinistrae in dextram in secundo; factum ex triplo quadrato partis dextræ in sinistram in tertio, cubus denique partis sinistrae in quarto loco terminatur. (§. 43.)

COROLLARIUM II.

251. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ sinistimæ habeantur pro una, & continuo patet, cubum quemlibet componi ex cubis singularum partium radices, & ex factis quadrati tripli quarumlibet sinisteriorum in proximè dexteriores, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexteriores in omnes sinisteriores.

SCHOLIUM III.

252. Sit radix 346. sume 340 pro parte una radices, erit 6 pars altera, consequenter (§. 247.)

346		
346		
90000		Quadratum P. I.
12000)	Facta ex I. in II.
12000)	
1600		Quadratum P. II.
115610		Quadratum P. I. & II. simul.
2040)	Facta ex P. III. in I. & II. simul.
2040)	
36		Quadratum P. III.
27000000		Cubus P. I.
3600000		
3600000)	Facta ex Quadrato P. I. in II.
3600000)	
480000		

480000

480000

480000

640000

693600

693600

693600

12240

12240

12240

216

Facta ex Quadrato P. II. in I.

Cubus P. II.

Facta ex Quadrato P. I. & II.
in P. III.Facta ex Quadrato P. III. in P.
I. & II. simul.

Cubus Partis III.

41421736

Cubus totius.

Notandum scilicet; sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse, cumque Theorema generaliter de radice utcumque in duas partes divisa statuatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari potest. e.g. numerus 346 non solum in 340 & 6, vel in 300 & 46, sed etiam in 195 & 151, in 89 & 257 & in duas quasunque partes alias stante Theoremate dividi potest: id quod etiam tentanti palam fiet, modo notetur, si numerus divisus non habeat adjunctos zéros, facta omnia cum sint unitatum, scribantur in loco unitatum.

Caeterum idem valet in numeris quadratis, imò in genere in omnibus potentiis.

Quod si cui haec obscuriora, is eadem omnia poterit invenire eò modo qui in scholio II. §. 249 datus est, sed multiplicatio prolixior evadit. Ne tamen quidpiam obscuritatis remaneat, secabitur cubus radiceis trinomialae in dictas partes sub tempus praelectionum.

COROLLARIUM III.

253. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 250.) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum nume-

F4 ris

ris in se invicem ductis addendarum, si solitarii ponantur, vide in scholio II. Exemplum §. 249.

PROBLEMA XXIV.

254. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Numerus datus distingvatur in classes tres notas unicuique assignando, initiô à dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur quot classes emergunt. (§. 220. 247.) classis verò finitima unam vel duas notas habere potest.

II. In tabula radicum (§. 227.) quæratnr numerus cubicus eò. numero proxime minor, qui in classe finitima continetur nisi ipse in eadem inveniatur; atque ab hoc subtrahatur, e us verò radix post lunulam scribatur, est enim pars prima radiceis. (§. 220.)

III. Quot si inventi quadratum tripulum (§. 247. 250.) ponatur pro divisore ad latus subsequents classis cum priore si quot fuerit residuo. Tum in tribus aut quatuor notis finitimis inquiratur novus quotus per abacum Pyth: (§. 95.) inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda radiceis. (§. 247. 184.)

IV. Divisor ducatur in novum quotum, & productum scribatur sub nota tertia primæ classis à sinistris numerando; sub nota verò secunda dictæ classis terminetur factum ex triplo quadrato novi quoti in præcedentem, sub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici superscriptis subtrahantur (§. cit.)

V. Quod si operatio per reliquas classes juxta regulam tertiam & quartam continuetur, prodibit radix quæsitæ. (§. 251. 184.) Ex: gr:

	47	437	928	362
	27	—		
Tripl: Q. P. I. seu Divisor	27	20	437	
Fac: ex Div: in Quotum		16	2	
Fac: ex tripl: Q. novi Q. in præc:		3	24	
Cubus novi Quoti.			216	
Summa Factorum.	19	656		

Tr: Q. P. I. seu Div:	3888	781	928
Fac: ex Div: in quotum.		777	6
Fac: Tr: Q. N. Q. in præced:		4	32
Cubus N. Q.			8
Summa Factorum		781	928

000000

PROBLEMA XXV.

255. Radicem cubicam ex fractione extrahere, cuius numerator & denominator cubus est.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem quo supra §. 241. modo patet radicem singulatim ex numeratore & denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ est $\frac{4}{9}$

COROLLARIUM I.

256. Hinc etiam eodem quo supra modo §. 242. Radix prope vera in fractione dati denominatoris invenitur, si numerus, qui cubus non est per huius denominatoris cubum multiplicetur, & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subiiciatur.

SCHOLIUM I.

257. Ex: gr: Si ex 12 extrahenda radix cubica prope vera defectu minore quam $\frac{1}{8}$, ducatur 12 in

512 cubum ipsius 8, & ex facto 6144 extrahatur radix cubica 18 erit $\frac{18}{8}$ seu $2\frac{2}{8}$ radix prope vera

cujus defectus est minor quam $\frac{1}{8}$ nam si elevetur ad cubum id ut supra in quadratis apparebit (§.243.)

COROLLARIUM. II.

258. Imò inde ulterius etiam (§.244.) consequitur. Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri si residuo numero qui cubus non est 3, 6, 9 &c. cyphræ à dextris jungantur pro decimis centesimis, millesimis pârribus & operatio juxta §. 244. continuetur.

SCHOLION II.

259. Ex: gr: Sit extrahenda radix cubica ex 3, eam reperies $1\frac{44}{100}$

$$\begin{array}{r}
 3 \quad \left(1 \frac{44}{100} \right. \\
 \hline
 3 \quad 2 \quad 000 \\
 \underline{1 \quad 2} \\
 48 \\
 \underline{64} \\
 1 \quad 744 \\
 \hline
 588 \quad 256 \quad 000 \\
 \quad 235 \quad 2 \\
 \quad \quad 6 \quad 72 \\
 \quad \quad \quad 64 \\
 \hline
 \quad 241 \quad 984 \\
 \quad \quad 14 \quad 016
 \end{array}$$

SCHOLION. III.

260. Si tabulis numerorum cubicorum utaris idem

idem compendium facere licet quod supra §. 246. in
extrahenda radice quadrata commendavimus.

PROBLEMA XXVI.

261. Examinare extractionem radice quadratae
ac cubicae. RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam, &
facto residuum si quod fuerit, addatur. Quod si nu-
merus prodeat, ex quo Radix extracta, erit numerus
inventus radix quadrata dati vel exacta, vel si talem
non habuerit prope vera. (§. 218.)

1857 Ex: gr: Radicem Quadratam prope
veram ex 345 supra §. 245. inveni-

12999	57	Duc radicem 1857 in
9283	18	se ipsam, & facto 3448449 addere-
14856	100	siduum 1551 prodibit numerus 345,
1857		ex quo extractio fieri debebat, qua-
3448449		tuor cyphris auctus, ut in extractione
1551		ad inveniendas centesimas factum fuerat
3450000		

II. Radix cubica inventa ducatur in se ipsam & fa-
ctum denuo in eandem. Productio posteriori addatur
si quod fuerat residuum. Quod si numerus prodeat,
ex quo extractio facta, operatio rite peracta. (§. 220.)

144 Ex: gr: Superius §. 259 radix ex 3

144	44	Duc hanc radi-
576	1	cem 144 in se ipsam & factum 20736.
576	100	denuo in 144. Productio alteri 2985984
144		adde quod supra residuum erat 14016.
20736		Aggregatum est 3 sex cyphris aucta
144		ut in operatione factum fuerat.
82944		
82944		
20736		
2985984		
14016		
3000000		

THEO.

THEOREMA XLII.

262. *Exponens rationis quadratorum est quadratum: Cuborum cubus: Et in genere potentiarum cuiusque gradus exponens rationis est potentia ejusdem gradus exponentis radicem.*

DEMONSTRATIO

Quadrata habent rationem duplicatam; cubi triplicatam; & in genere potentiae cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum radicum. (§. 230.) Quare cum exponens rationis compositae sit æqualis facto exponentium simplicium (§. 188.) & cum iste exponens simplicium rationum idem sit in omnibus rationibus ex quibus componuntur duplicatae triplicatae & in genere multiplicatae quaecunque rationes (§. 135.) Si ducatur bis in se erit exponens quadratum. Si ter cubus &c. hoc est exponens rationis duplicatae erit quadratum (§. 218.) triplicatae cubus (§. 220.) & in genere multiplicatae cujuscunque rationis exponens est potentia exponentis radicem. (§. 222.) *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

263. *Si ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum, Et in genere potentiae cujuscunque per aliam similem numerus integer prodit, etiam ex divisione radicis per radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum, & in genere potentiae cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis quadratorum, cuborum, vel in genere potentiarum similium se mutuo dividantium (§. 114.) Adeoque quadratum, cubus & in genere potentia exponentis radicem (§. 262.) Quare cum quotus ex divisione potentiae unius per aliam est numerus rationalis integer *per hypoth.* erit idem quotus numerus rationalis integer

teger quadratus, cubus vel potentia alterius gradûs. Sed quadrati cubi & cuiuscunque potentiae numeri rationalis integri radix etiam numerus integer rationalis esse debet. (§. 222.) Ergo exponens radicem hoc est quotus ex divisione radicis per radicem numerus integer rationalis esse debet. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

264. Quare si radix radicem non metitur, nec quadratum quadratum, nec cubus cubum, nec potentia quaecunque aliam similem metitur (§. 66.) consequenter fractio integro major ex istiusmodi quadratis, cubis, vel potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis. (§. 195. 242)

THEOREMA XLIV.

265. Si numeri integri non datur radix in integris; nec dabitur per fractos.

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit radix, ex eius itaque iterata multiplicatione per se ipsum produci debet numerus datus (§. 222.) sed quotiescunque fractum per se ipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 110.) isque in praesenti casu ad integrum irreducibilis. (§. 264.) Quare cum numerus datus sit integer *ex hypoth.* fractus ejus radix esse nequit. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

266. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio alio numero in se aliquoties ducto oriantur, (§. 67.) Ex numeris primis in se nulla radix perfecta extrahi potest in integris. (§. 227.) adeoque nec per fractos dari potest. (§. 265.)

HYPOTHESIS XIII.

267. Interdum utile est extractionem radicis tantum indicari praesertim si perfecta haberi non potest. Est autem signum radicale sequens (*V*) cui in vertice praeprefi-

figitur exponens dignitatis, si altioris gradûs, quam quadrata fuerit. Ex. gr. $\sqrt{2}$ denotat radicem quadratam ex 2, $\sqrt[3]{5}$ denotat Radicem eubicam ex 5.

S C H O L I O N.

268. In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales radices, quæ a se dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam a rectam aliam, consequenter numeros (§. 9.) eosque irracionales: cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri Surdi; quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit. (b) Et olim, & nunc interdum Radicales appellantur.

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA XLV.

269. Si fuerint quatuor quantitates proportionales, factum extremarum æquale est facto mediarum.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r} 6:3 = 8:4 \quad A:B = C:D \text{ per hypoth.} \\ \hline 4 \quad 3 \quad \text{\& (\$. 132.) Ergo } AB:BC \\ \hline 24 = 24 \quad = CD:DC (\$. 159.) \text{ sed } CD \\ = DC (\$. 182.) \text{ igitur } AD = BC (\$. 126.) \text{ Q.e.d.} \end{array}$$

THEOREMA XLVI.

270. Si fuerint tres quantitates continuè proportionales; factum extremarum est æquale quadrato mediae.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r} 2:4 = 4:8 \quad \text{Quoniam } A:B = B:C \text{ per hypoth.} \\ \hline 4 \quad 2 \quad \text{erit } AC = BB (\$. 269.) \\ \hline 16 \quad 16 \quad \text{sed } BB \text{ est quadratum ipsius } B \\ \quad \quad \quad (\$. 218.) \end{array}$$

(b) Stiphelius in Arithm: l. 2. c. 12. p. 134.

(§. 218.) Ergo factum extremarum AC æquale est quadrato medię Q.e.d.

THEOREMA XLVII.

271. Si factum aliquod ex duabus quantitatibus AD sit æquale alteri facto ex duabus aliis BC erunt factores reciproce proportionales. hoc est: $A : B = C : D$.

DEMONSTRATIO.

$AC : AD = C : D$ (§. 153.) sed $AD = BC$ per hypoth: Ergo $AC : BC = C : D$ (§. 152.) consequenter $A : B = C : D$ (§. 141.) Q.e.d.

COROLLARIUM.

272. Si itaque in serie quatuor quantitarum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam erunt quantitates istę proportionales.

SCHOLIUM.

273. Sit Ex: gr: $6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$, facta ista omnes in proportionem resolvi possunt, videlicet.

$$6 : 8 = 3 : 4 \quad 8 : 6 = 4 : 3$$

$$6 : 3 = 8 : 4 \quad \& \quad 8 : 4 = 6 : 3$$

$$4 : 8 = 3 : 6 \quad 3 : 6 = 4 : 8$$

$$4 : 3 = 8 : 6 \quad 3 : 4 = 6 : 8$$

PROBLEMA XXVII.

274. Inter duos numeros 8 & 72 medium proportionalem invenire.

RESOLUTIO.

I. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8. (§. 97.)

II. Ex facto extrahatur radix quadrata 24; (§. 240.) erit hæc numerus quæsitus. (§. 270.)

PROBLEMA XXVIII.

275. Datis duobus numeris 2 & 8 invenire tertium proportionalem.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Siquidem per hypoth: 3 numeri proportionales esse debent,

debent, secundus latorum 3 ducatur in se ipsum, jam cum quadratum 64 æquale sit facto extremorum (§. 270.) dividatur deinde 64 per primum 2, quotus 32 est numerus quæsitus (§. 184.) *Q.e.f. & d.*

PROBLEMA XXIX.

276. *Datis tribus numeris 3, 12, 5 invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

I. Secundus 12 ducatur in tertium 5.

II. Factum 60. dividatur per primum 3. Quotus 20: est quartus numerus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *per hypoth.* quatuor numeri proportionales esse debent, factum ex secundo in tertium erit æquale facto ex primo in quartum (§. 269.) Quod si ergo hoc factum per primum dividatur quotus est terminus quartus (§. 184.) *Q.e.d.*

SCHOLIUM. I.

277. *Resolutio huius Problematis vulgò Regula Trium appellatur; quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc Regula aurea vocatur. Facile autem apparet hac Regulâ nullibi esse utentem, nisi numerorum datorum proportio interveniat. Ex: gr: Sit vas ingens aquâ repletum, quæ per exiguum foramen effluat. Ponamus intra 2 minuta prima effluere tres ollas. Inveniri debet quanta tempore 100 ollæ effluant. Tres in hoc casu dantur numeri, quartus invenendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere: consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quare hæc quæstio per regulam trium solvi non potest.*

COROL.

COROLLARIUM.

278. Siquidem ut unum totum refertur ad suas partes ita aliud quodlibet totum potest referri ad suas partes. Denominatores verò fractionum sunt tota. (§. 51.) Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem denominatoris dati.

Ex: gr: Sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam, cujus

denominator 30, reperietur ea $\frac{20}{30}$ (§. 197.) scilicet per Problema præcedens. $3 : 2 = 30 : 20$

$$\begin{array}{r} 3 \) \ 60 \quad (\ 20 \\ \underline{60} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{60} \end{array}$$

COROLLARIUM II.

279. Si ergo inveniendus valor fractionis alienius, ex. gr: $\frac{2}{3}$ floreni quot æquivalent grossis; Numerus partium, in quas integraliquod communi more dividitur pro denominatore sumendus.

Ita cum apud nos florenus unus in 30 grossos dividatur, ex allato exemplo apparet 20 grossos æquivalere duabus tertiis unius floreni. Sed siquidem unus cubitus dividitur in 24 digitos si fiat per coroll: præcedens $3 : 2 = 24 : 16$; fractio $\frac{2}{3}$ unius cubiti æquivalet digitis 16.

COROLLARIUM III.

280. Si verò denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita

G

repe-

reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{6666}{10000}$ &c. in infinitum.
 $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{10000}$ fere.

S C H O L I O N II.

281. In fractionibus decimalibus denominator omitteri solet, quia ex meris cyphris & unitate præfixa constat, in ejus autem locum punctum (.) numeratori præfigitur, & loca vacua cyphris replentur ita ut una cyphra præponatur, si fractionis numerator una nota & denominator 100, duæ cyphrae præponuntur, si fractionis denominator 1000, & numerator una nota; 3 cyphrae præponuntur, si denominator 10000 &

numerator una nota &c. Ex: gr: loco $\frac{1}{100}$ scribimus

0.01; loco $\frac{1}{1000}$ scribimus 0.001 loco $\frac{1}{10000}$ 0.0001

&c. similiter $\frac{23}{100}$ exprimuntur 0.23; $\frac{47}{1000}$ 0.0047,

& $3\frac{23}{10000}$ scribitur 3.00023. Facile enim apparet cujus-

modi sit, hoc est, an decima centesima aut millesima fractionis. Multis harum fractionum in Matthesii usus, quas primus in condendis tabulis sinuum adhibuit Joannes Regiomontanus.

S C H O L I O N III.

282. Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt; pro duplo enim mercis duplum, pro triplo triplum solvi debet. Datò itaque pretio cujusdam mercis datæ in quantitate aliqua ex: gr: in ponderibus mensuris &c. per regulam trium invenitur sive pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, sive quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. Ex: gr: pretium 3 librarum sunt 4 Tha-

leri

leri, quantum est pretium 17 librarum? Cum sit ut 3
librae ad 17 libras, ita illarum pretium (4 Thaleri)
ad pretium harum, hoc quidem ita invenitur.

$$\begin{array}{r} 3L. : 17L = 4Th: \\ \underline{4} \quad 3)68(\quad 22\frac{2}{3} \\ 68 \\ \hline 08 \\ \hline 6 \\ \hline 2 \end{array}$$

Item 3 librae veneunt 4 Thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ Tha-
leris? Cum sint ut 4 Thaleri ad $22\frac{2}{3}$, ita 3 librae
ad quaesitas; harum numerus ita invenitur.

$$\begin{array}{r} 4Th: 22\frac{2}{3}T. = 3L. \\ \underline{3} \quad 4)68.(17 \\ 68 \\ \hline 4 \\ \hline 28 \\ \hline 28 \end{array}$$

Hinc simul patet, quomodo Regula Trium exami-
netur, scilicet si factum extremorum divisum
per unum numerum ex datis mediorum restitu-
at alterum ex datis mediorum, operatio ritè pera-
cta (§. 269; 184.)

S C H O L I O N. IV.

283. Similiter merces operariorum est tempori
proportionalis, quò laborant. Item quantitas laboris
tempori aequaliter diviso ex: gr: in horas, dies &c.
est proportionalis. ex: gr: intra duas horas 6 libri
folia perleguntur: quanto horarum spatio 360 perle-
gi poterunt.

G2

6F:360

$$6 F : 360 F = 2 H :$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 720 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \text{) } 720 \text{ (} 120 \\ 6 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 00 \end{array}$$

SCHOLIION V.

284. Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, cum rebus ipsis respondentibus; ad homogeneos igitur reducendi. Ita Thaleri in florenos, floreni in grossos, grossi in solidos, librae in semuncias, horae in minuta &c. convertuntur. ex: gr: 3 librae & 4 semunciae veneunt 36 florenis & 14 grossis, quanti librae 2 venient? quia libra una mercatorum constat semunciis sive nostro idiomate ma

Łótów 32 calculus erit ejusmodi

$$3 L . 4 S : 2 L = 36 Fl: 14 gr:$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 96 \\ \hline 4 \\ 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 64 \\ \hline 64 \\ 1094 \\ \hline 64 \\ 4376 \\ 6564 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 1080 \\ 14 \\ 1094 \\ \hline 64 \\ 4376 \\ 6564 \end{array}$$

$$100 \text{) } \frac{6564}{70016} \quad \left(700 \frac{16}{100} \text{ seu } 25 \frac{4}{25} \right)$$

Hoc est 100 S. : 64 S = 70016. gr. : 700 $\frac{4}{25}$ gr:
Inveniatur itaque valor florenorum

$$\text{Scilicet } 30 \text{) } \frac{700}{2330} \text{ seu grossi: 10.}$$

$$\frac{9}{1}$$

Si igi-

Si igitur 3 librae 4 semunciae veneunt 36 florenis & grossis 14, 2 librae venient 23 flor: & gross: 10

& praeterea unius grossi $\frac{4}{25}$

SCHOLION VI.

285. In scriptis Arithmeticorum Regula Trium inversa occurrit per quam terminus datorum primus multiplicatur per secundum, & factum dividitur per tertium; contraria ratione qua in regula trium directa usi sumus (§. 276.) quia scilicet termini contraria naturam proportionis ordinantur. Sed eã opus non est, si numeri dati prout proportio exigit ordinentur. ex: gr: 125 Milites operi extrucendo 6 menses inpendunt; quot milites requiruntur, ut idem opus intra 2 menses conficiant. Evidens est, quòt sit ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum qui opus intra 6 menses conficiunt ad numerum militum, qui idem opus intra 2 menses conficiunt. Quo minore enim tempore conficitur opus, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum;

$$2 : 6 :: 125 : 375.$$

6

$$2 \overline{) 750} \quad (375$$

SCHOLION. VII.

286. Interdum iterata Regulae trium applicatio ne opus est, antequam numerus quaesitus inveniatur, Ea vulgò pro peculiari Regula venditur & ab aliis Regula de 5, de 7. ab aliis Regula composita appellatur. Ex: gr: 300 Thaleri dant intra 2 annos usuram 42 Thaleros (sinimirum à 100 accipiantur 7) quantam usuram dabunt 2000 Thalerorum per annos 12. Hic per Regulam trium invenitur quanta usura à

G3

2000

2000 Thalerorum expectanda sit intra 2 annos; de-
indè per eandem inquiritur quanta usura intra 12 an-
nos futura sit.

$$300 : 2000 = 42 :$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 300 \overline{) 84000} \quad (280 \\ \underline{6} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$2 : 12 = 280.$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{56} \\ 28 \\ 2) \underline{3360} \quad (1680 \\ \underline{2} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 16 \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$$

SCHOLION VIII.

287. *Exempla istiusmodi per regulam trium semel applicatam solvi possunt. Cum enim in nostro casu his 300 Thaleri eandem dent usuram intra 1 annum, quam 300 intra duos, & duodecies 2000 tantam intra 1 annum, quantam 2000 intra 12 annos multiplicatis terminis prioribus per temporum circumstantias ita inferatur:*

600 Thaleri dant usuram (intra annum scilicet)
42 Thaleros, quantam dabunt duodecies 2000, idest
24000 Thaleri usuram (itidem intra annum 1)

600, Th:

600 Th. : 24000 T = 42 :

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 \hline
 48000 \\
 96 \\
 \hline
 600) 1008000 \quad (1680 \\
 6 \\
 \hline
 40 \\
 36 \\
 \hline
 48 \\
 48 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Si aliquando contingat terminos nonnullos contra naturam proportionis dari, fiat, quod faciendum §. 285. praescripsimus. Posterior haec methodus priori praefertur, quod in illa ad fractionum taedia saepe prolabamur.

SCHOLIUM IX.

288. Dantur & alii casus, in quibus iterata regula trium adhibenda. Ita si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii, & inde speciali nomine appellatur Regula Societatis.

Est enim ut summa collatarum rerum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale, ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. Ex: gr: Lucrum commune trium personarum esi 2000 Thalerorum, collatum 1mi 1000 2di 500; tertii 300; inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi.

Collatum primi	1000	Thal:
Secundi	500	
Tertii	300	
Summa Collator:	1800	
	G4	1800 Th:

1800 Th; : 1000 Th = 2000 Th.

2 000

1800) 2000000 (IIII $\frac{2}{18}$

18

20

18

Lucrum primi.

20

18

20

1800 Th : 500 Th = 2000

2 000

1800) 1000000 (555 $\frac{10}{18}$

90

100

90

Lucrum secundi.

100

90

10

1800 Th : 300 Th = 2000

2 000

1800) 600000 (333 $\frac{6}{18}$

54

60

54

Lucrum tertiæ

60

54

6

Examen.

$$\text{IIII} \frac{2}{18} \quad \text{Lucrum primi.}$$

$$555 \frac{10}{18} \quad \text{Secundi.}$$

$$333 \frac{6}{18} \quad \text{Tertii.}$$

$$2000 \cdot \text{Th.} \quad \text{Lucrum Commune.}$$

Quodsi fuerint praeterea circumstantiae temporis, collata singula ducuntur in tempus sibi debitum ut §. 287. aut iteratur Regula Trium per §. 286. Ex: gr: Trium Personarum lucrum commune fuit 9000 Aureorum. Collatum primi 100 per menses 16: secundi 140 per menses 10, tertii 300 per menses 7. Quantum singulis debetur. Ductis collatis in tempora numerorum productorum 1600, 1400 & 2100 Summa fit 5100: erit proinde.

Summ: Coll: Coll: par:

$$5100 : 1600 = 9000 : 2823 \frac{27}{51}$$

$$5100 : 1400 = 9000 : 2470 \frac{30}{51}$$

$$5100 : 2100 = 9000 : 3705 \frac{45}{51}$$

Examen.

$$2823 \frac{27}{51} \quad \text{Primi.}$$

$$2470 \frac{30}{51} \quad \text{Secundi.}$$

$$3705 \frac{45}{51} \quad \text{Tertii.}$$

$$9000 \quad \text{Lucrum Commune.}$$

SCHOLION X.

289. Sunt quaestiones aliae quae calculum eundem

dem requirunt, ut cum in medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum aliquod integrum sit ponderis dati. Ex: gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur dosi unius est 4 alterius 5 tertii 2 uncia- rum; inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit 8 librarum. Calculi typus talis erit.

Pondus	(Primi.)	4	unc:
	(Secundi.)	5	
	(Tertii,)	2	
				Summa	11

unc. Libr: unc:

Vi §. 136. 11 : 8 = 4 & quia Phar-
macopaeorum libra 12 uncis constat ut sint numeri ho-
mogenei (§. 284.)

$$11 : 8 = 4$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 96 \\ 4 \\ \hline 384 \end{array} \quad 11 \quad \left(\begin{array}{r} 384 \\ 33 \\ 54 \\ 44 \\ \hline 10 \end{array} \right) \quad 34 \frac{10}{11} \quad \begin{array}{l} \text{Pondus} \\ \text{simplicis} \\ \text{primi.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Unc} \\ 11 \quad 96 = 5 \\ 5 \\ \hline 480 \\ 44 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Unc} \\ 5 \\ \text{Pondus} \\ 43 \frac{7}{11} \text{ simplicis} \\ \text{secundi} \end{array}$$

Unc

Unc
11

11

Pond

21
Etica
regu
prop
vel
num
ipso
ret
P

7)

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Unc} & & \text{Unc} \\
 11 : 96 = 2 & & \\
 \quad \quad \quad 2 & & 5 \\
 11) 192 & \text{C} & 17 \frac{11}{11} \text{ Pondus simplicis tertii.} \\
 \quad \quad 11 & & \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 82 & & \\
 \quad \quad 77 & & \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 5 & &
 \end{array}$$

Examen.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Pondus simplicis primi.} & 34 & \frac{10}{11} \\
 \text{secundi.} & 43 & \frac{7}{11} \\
 \text{tertii.} & 17 & \frac{5}{11} \\
 & & \hline
 & & 11
 \end{array}$$

Pondus mixti. 96 Unc. = 8 Libris.

SCHOLIUM XI.

290. Compendia faciendae Regulae Trium Practicæ Italicæ nuncupantur. Nimirum quoniam per regulam Trium ad tres numeros datos invenitur 4tus proportionalis (§. 276.) primus & secundus (§. 157.) vel etiam primus & tertius (§. 160.) per eundem numerum si fieri potest exactè dividantur, & quoti in ipsorum loca substituantur, ceu ex subsequente apparet exemplo.

Pretium 3 libr: est 9 Thal: quantum 7 libr:

$$3) 1 : 3 = 7$$

Facit 21 Thal:

Item.

14 L. est 26 Thal: quantum 7 Libr:

$$7) 2 : 26 = 1$$

2) 26 (13 Facit Thal:

Uti.

Utilissimæ itaque sunt istæ Præcticae Italicae.

SCHOLIION XII.

291. *Sunt præterea Alligationis, Positionis simplicis & duplicis. Cecis seu Virginum sic dictæ Regulæ, sed quoniam satis operoso & prolixo calculo per Regulam Trium solvuntur, eas ope calculi Algebraici modò facillimo solvemus, uti & omnes alias quascunque nodosas Quæstiones.*

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

292. Si in serie trium quantitatuum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; hæ quantitates continuè æquidifferentes appellantur. Si vero in serie quatuor quantitatuum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, discretim æquidifferentes dicuntur. Ita 3, 6, 7, 10 sunt numeri discretim æquidifferentes; 3, 6, 9 numeri continuè æquidifferentes.

SCHOLIION.

293. *Dicuntur hæ quantitates vulgò Arithmeticæ proportionales, ut distinguantur à proportionalibus geometricè, sed minus propriè sic dicuntur, nec ad mentem veterum.*

COROLLARIUM I.

294. Si termini semper crescunt, in continuè æquidifferentibus, terminus secundus est summa ex primo & differentia; terminus tertius est summa ex secundo & differentia, quartus summa ex tertio & differentia & ita porro. Si termini in iisdem continuè æquidifferenti-

rentibus decreſcant, primus eſt ſumma ex ſecundo & differentia; ſecundus ſumma ex tertio & differentia, tertius ſumma ex quarto & differentia & ita porro.

COROLLARIUM II.

295. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcant, ſecundus eſt ſumma ex primo & differentia, quartus ſumma ex tertio & differentia; ſi verò decreſcant, primus eſt ſumma ex ſecundo & differentia, tertius ex quarto & differentia.

THEOREMA XLVIII.

296. Si fuerint tres quantitates continuè æquidifferentes; ſumma primi & tertii eſt medii dupla.

DEMONSTRATIO.

4 7 10 Si enim termini creſcant, ſecundus
7 4 componitur ex primo & differen-
14 = 14 tia, tertius ex ſecundo & differentia (§. 294.) adeoque ex primo

& differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus, conſtabit ſumma primi & tertii ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo ſecundi dupla. Q.e.d.

Eodem modò Demonſtratio procedit, ſi termini decreſcant. Vel

Si terminus primus ſit I. ſecundus II. tertius III. Differentia D; Demonſtratio ocularis erit iſtiusmodi.

$$I = I \quad \text{§. 73.}$$

$$III = II + D \quad \text{§. 294.}$$

$$III + I = II + I + D \quad \text{§. 78.}$$

& etiam

$$II = I + D \quad \text{§. 294.}$$

$$\text{Ergo } III + I = II + II \quad \text{§. 14.}$$

$$\text{hoc eſt } III + I = 2II \quad \text{§. 86.}$$

THEOREMA XLIX.

297. Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, ſumma primi & quarti æqualis eſt ſummae ſecundi & tertii.

DEMON-

DEMONSTRATIO

$$\begin{array}{r} 3 - 5 = 8 - 10 \\ \hline 8 \qquad \qquad 3 \end{array}$$

$13 = 13$ Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 294.) Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat. Si verò secundum tertio addas, aggregatum ex primo differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 78.)

Q. e. d.

Eodem modò demonstratur si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLIUM.

298. Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio etiam ocularis erit.

$$\begin{array}{r} II = I + D \quad (\S. 294.) \quad \& \quad IV = III + D \quad (\S. cit.) \\ III \quad III \quad (\S. 78.) \quad \& \quad I \quad I \quad (\S. cit.) \end{array}$$

$$II + III = III + I + D \quad \& \quad IV + I = III + I + D.$$

hoc est

$$II + III = IV + I \quad (\S. 77.)$$

PROBLEMA XXX.

299. Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.

RESOLUTIO.

I. Addantur numeri dati 9 & 13

II. Summa 22 dividatur per 2.

Quotus II erit numerus quæsitus (§. 296.)

PROBLEMA XXXI.

300. Datis tribus numeris 8, 5, 9 quartum æquidifferentem invenire.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam summa primi & quarti est æqualis summæ secundi & tertii (§. 297.) Ergo si à summa mediorum subtrahatur primus erit residuus quartus; itaque

I. Nu-

I. Numerus secundus 5 addatur tertio 9

II. à summa 14 subtrahatur primus 8, Residuus 6 est quartus quæsitus (§. cit:)

COROLLARIUM.

301. Si datis tribus quæraturs primus, à summa mediorum subtrahendus tertius. Si datis iisdem quæraturs medius, à summa extremorum subtrahendus medius. (§. 300. 297.)

SCHOLIUM.

302. Quæstiones solvendæ huc pertinentes cui animus fuerit in Algebra occurrent.

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

303. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescientium vocatur *Progressio Geometrica*.

Ex: gr: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

Vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

304. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrescientium dicitur *progressio Arithmetica* Ex: gr: 3, 6, 9, 12, 15, 18. Vel 32, 28, 24, 20 &c.

DEFINITIO LXIV.

305. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes, dicuntur hi illorum *Logarithmi* Ex: gr: Sint duæ progressiones:

Geom:

Geom: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
 Arithm: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
 erit 0 Logarithmus termini primi 1; 5 Loga-
 rithmus sexti 32, 7 Logarithmus octavi 128.

Definitio est Genetica, erit verò nominalis,
 si dicantur Logarithmi termini progressionis
 Arithmeticæ respondentes terminis progres-
 sionis Geometricæ.

COROLLARIUM I.

306. Si progressio Arithmetica fuerit series nume-
 rorum naturalium, & à cyphra incipiat, ut in exemplo
 allato; Logarithmi designant distantias numerorum pro-
 portionalium ab unitate; ex: gr: Logarithmus 5 respon-
 dens 32 designat terminum hunc esse quantum ab uni-
 tate.

COROLLARIUM II.

307. Quoniam in progressionem Geometricam ab u-
 nitate incipiente termini sunt dignitates ordine natu-
 rali progredientes (§. 222. 303.) Si progressio A-
 rithmetica eadem sit quæ in exemplo allato, logarith-
 mi sunt exponentes dignitatum (§. 223.) Ex: gr:
 2 est dignitas prima ejusque exponens 1; 64 dignitas
 sexta, ejusque exponens 6.

DEFINITIO LXV.

308. Si progressionem Geometricam ab unita-
 te incipienti & in ratione decupla crescenti
 subscribantur totidem alii à zero incipientes
 numeri naturales progressionis Arithmeticæ,
 dicuntur hi *Characteristica* Logarithmorum.
 Ex: gr: Sint duæ Progressiones:

Geom:

Geom: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Arithm: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

0, 1, 2, 3, 4, &c. sunt characteristicae Logarithmorum.

S C H O L I O N.

309. *Definitur ita Characteristica per ordinem ad series progressionum Geometricae & Arithmeticae ad condendum Canonem Logarithmorum assumptas.*

C O R O L L A R I U M . I.

310. Quævis itaque Characteristica est Logarithmus non tamen è contra. (§. 305.)

C O R O L L A R I U M . II.

311. Cum utraqûe series in infinitum continuari possit. (§. 42.) adeoque quilibet numerus naturalis termino cuilibet Progressionis Geometricæ respondere. (§. 308.) quilibet numerus potest esse characteristica Logarithmorum (§. cit.)

C O R O L L A R I U M . III.

312. Characteristica igitur Logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, est 0. pro numeris à 10 ad 100, est 1, pro numeris à 100 ad mille est 2 &c. hoc est præter zerum, characteristica quælibet pro numeris tot habet unitates, quot numerus eidem respondens notat, demptâ unâ. (§. 308.) Si verò integrum aliquod præter notam primam sinistimam reliquis zeris constet, tot characteristica habebit unitates, quot numerus integer zéros. (§. cit.) *Ex: gr: Characteristica 3 est numeri 1000; si à 1000 dematur una nota-residuae notæ tres 000 respondent unitatibus characteristicae tribus.*

T H E O R E M A . L.

313. *Si Logarithmus unitatis sit 0, erit Logarithmus facti summa ex Logarithmis factorum.*

H

DEMON-

DEMONSTRATIO.

In multiplicatione est ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 58.) Quare si subscrībantur totidem respondentes numeris Logarithmi, erit Logarithmus facti æquidifferentium quartus ad Logarithmum unitatis & Logarithmos factorum (§. 305.) adeoque differentia inter Logarithmum unitatis, & summam Logarithmorum factorum (§. 300.); sed Logarithmus unitatis est 0 *per hypoth.*

Ergo Logarithmus facti est summa ex Logarithmis factorum. Q. e. d.

COROLLARIUM. I.

314. Cùm factores quadrati sint inter se æquales, hoc est quadratum sit factum ex radice in se ipsam. (§. 218.) Logarithmus Quadrati est duplus Logarithmi radice. (§. 403.)

COROLLARIUM II.

315. Eòdem modò patet Logarithmum cubi esse triplum (§. 220 313.) Biquadrati quadruplum, potentie 5tæ quintuplum, 6tæ sextuplum &c. Logarithmi radice: & in genere cujusque Potentie tantuplum Logarithmum esse Logarithmi radice, sive toties multiplicatum quota est numero ipsa Potentia.

Ita quoniam quadratum est 2da potentia, bis debet poni Logarithmus radice, ut prodeat Logarithmus 2dae potentie, quoniam cubus est tertia potentia, logarithmus radice ter debet poni, ut prodeat logarithmus cubi &c. (§. 222. 313.)

COROLLARIUM III.

316. Quoniam verò Potentie per exponentes distinguuntur (§. 223. 224.) adeoque exponens potentie tot habet unitates, quota est numero ipsa potentia (§. 225.) prodibit etiam Logarithmus potentie, si Logarithmum radice toties ponas, quot habet unitates exponens potentie; hoc est si Logarithmum

num radices multiplices per exponentem potentiae. (§. 58.) Ita quoniam cubi est exponens 3, si Logarithmus radices multiplicetur per 3 prodibit Logarithmus cubi; triplus utique Logarithmi radices. (§. 315. 58.)

COROLLARIUM IV.

317. Quoniam denique ejusmodi Logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 307.); si exponens radices ducatur in exponentem potentiae prodibit Logarithmus sive exponens desideratae potentiae; adeoque

COROLLARIUM V.

318. Cum eodem modo quod componitur solvatur potentia, si dignitatis exponens dividatur per exponentem alterius potentiae, prodibit quotus exponens radices istius alterius potentiae. (§. 184.) Ita quoniam cubi est exponens 3, si exponens potentiae 6tae 6 dividatur per 3 quotus 2 est exponens radices cubicae. Similiter quoniam potentiae quartae est exponens 4, si 4 dividatur per 2 exponentem potentiae secundae, prodibit 2 exponens radices dignitatis secundae (§. cit.) consequenter exponens radices est subduplus, subtripus, subquadruplus &c. exponentis potentiae. (§. 315.)

COROLLARIUM VI.

319. Si igitur exponentem radices quadratae velis, divide exponentem potentiae datae per 2. si radices cubicae per 3: si biquadrati, exponens potentiae per 4 dividendus &c. (§. 318.)

SCHOLIUM.

320. Ex: gr: 3 summa Logarithmorum 1 & 2 est Logarithmus facti 8, ex 2 in 4. Similiter 7 summa Logarithmorum 2 & 5 est Logarithmus facti 128 ex 4 in 32. (§. 313.)

Porro 2 logarithmus quadrati 4 est duplus logarithmi radices 2. Item 3 Logarithmus cubi 8 est triplus

plus logarithmi radices 2 Est. (§. 314. 315.) Tandem Potentie tertiae 64 exponens 6 est factum exponente 2 radices 4 in exponentem 3 potentiae tertiae. Item potentiae quartae 256 exponens 8 est factum exponente 2 radices 4 in exponentem 4 potentiae quartae. (§. 317.) Denique potentiae 64 exponens 6 divisus per 3 exponentem potentiae tertiae hoc est $6 : 3 = 2$ est exponens radices cubicae 4 de potentia tertia.

Item potentiae 256 exponens 8 divisus per 4 exponentem potentiae quartae sive $8 : 4 = 2$ est exponens radices biquadratae 4 de potentia dicta 256 quarta. (§. 318.)

Quod ultimum est quadrati 64 e radice 8 exponens 6 divisus per 2 dat exponentem 3 radices quadratae 8, ejusdem cubi 64 exponens 6 divisus per 3 dat exponentem 2 radices cubicae 4 (§. 319.)

THEOREMA LI.

321. Si Logarithmus unitatis est 0, erit Logarithmus quoti differentia inter Logarithmos divisoris & dividendi.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 61.) Quare si subscribantur totidem respondentes numeris Logarithmi, erit Logarithmus quoti æquidifferentium quartus ad Logarithmos divisoris, dividendi atque Logarithmum unitatis (§. 305.) adeoque differentia inter Logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 300.) sed logarithmus unitatis est 0 per hypoth. Ergo logarithmus quoti est differentia inter logarithmos divisoris & dividendi. Q.e.d.

SCHOLIUM. I.

322. Admirandum istud sub initium sæculi superioris logarithmorum inventum debetur Clarissimo Jo. anni

Tan- anni Nepero Baroni Merchestonii è Scotia oriundo:
 um ex quò numerorum multiplicatio mutatur in additionem.
 ae ter- Divisio in Subtractionem, elevatio ad potentias in mul-
 est fa- tiplicationem. Extractio radicum in divisionem. Si e-
 poten- nim habeamus omnibus numeris respondentes logari-
 4 ex- thmos, logarithmi additi indicabunt fa-
 tertiae- ctum (§. 313.) subtracti quotum (§. 321.) multi-
 e 4 de- plicati numerum elevatum ad potentiam (§. 317.)
 expo- Et unus divisus per alium desideratam indicabit radi-
 ponens- cem (§. 318.) Ex: gr: Si numerus 4 debet elevari
 uarta. ad cubum logarithmus ejus 2 triplicatus 6 indicat nu-
 ponens- merum 64 cubum dati numeri 4 (§. 315.) Et è con-
 atae 8, tra si radix cubica de 64 sit extrahenda logarithmus
 expo- quoti 2 ex divisione logarithmi 6 per logarithmum cubi
 3 indicabit numerum 4 radicem cubicam ipsius 64. di-
 gnum scitu itaque quomodo sunt inventi; proinde sit.

PROBLEMA XXXI.

323. Numeri cujuscunque logarithmum invenire, Et
 canonem logarithmorum pro numeris naturalibus con-
 struere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam logarithmi sunt termini progressionis A-
 rithmeticae respondentes terminis progressionis Ge-
 ometricae (§. 305.) quævis progressio Geometrica,
 & illi respondens quævis Arithmetica assumi potest.
 Si assumatur itaque progressio Geometrica in ratio-
 ne decupla crescens & Arithmetica à zero incipiens.
 Ex: gr:

Geom: 1, 10, 100, 1000, 10000 100000.

Arithm: 0. 1. 2. 3. 4. 5.

Erunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. logarithmi numerorum
 1, 10, 100, 1000, &c. Inter 1 verò & 10, item inter
 10, & 100, inter 100 & 1000 &c. ut inveniantur lo-
 garithmi, debent primo inveniri numeri medii pro-
 portionales. Quoniam verò medii isti proportionales

H3

inter

inter 1 & 10 inter 10 & 100 exacti non dantur in integris, nec dabuntur etiam eorum logarithmi (§. cit.) in integris sed in fractis, ut igitur in fractis decimalibus quam proximi integris reperiantur tum medii geometricè proportionales, tum respondentes illis logarithmi, assumatur progressio

Geom: 1. 0000000, 10. 0000000, 100. 0000000

Arithm: 0.00000000, 1. 00000000, 2. 00000000

(§. 271.) ut defectus sive error unà millionesima minor evadat, adeoque quo ad usum accurati sint, atque integris æquivalent. Quod si igitur inter 1. 0000000 & 10. 0000000. Item inter 10. 0000000, 100. 0000000 &c. quærantur medii Geometricè proportionales omnes (§. 274.) atque etiam inter 0. 00000000 & 1. 00000000. Item inter 1. 00000000 & 2. 000 &c. medii æquidifferentes omnes (§. 299.) respondebunt hi singuli singulis terminis progressionis Geometricæ ab 1 ad 10, à 10 ad 100, à 100 ad 1000 &c. hoc est numeris datis naturalibus, adeoque eorum erunt logarithmi. (§. 305.) Q.e. f. & d.

SCHOLION I.

324. Ex: gr: Sit inveniendus logarithmus numeri 9, inter 1. 0000000 (A) & 10. 0000000 (B) quaeratur medius proportionalis (C) (§. 274.) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1. 00000000 medius æquidifferens (§. 299.) qui erit logarithmus ipsius C (§. 305.) hoc est numeri ternarium superantis

$\frac{1622777}{10000000}$ adeoque à novenario multum distans.

Quaeratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B, & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proximè majores & minores, donec tandem repetitò vigesies sexies calculo inveniat

9 $\frac{0000000}{10000000}$ (§. 280.) qui cum à novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habeatur. Quaerantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus.

0. 95424251.

Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quaeras, & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro

	Numeri medii Proportionales	Logarithmi
A	1. 0000000	0. 00000000
C	3. 1622777	0. 50000000
B	10. 0000000	1. 00000000
B	10. 0000000	1. 00000000
D	5. 6234132	0. 75000000
C	3. 1622777	0. 50000000
B	10. 0000000	1. 00000000
E	7. 4989421	0. 87500000
D	5. 6234132	0. 75000000
	&c. &c.	&c. &c.
Finis		Calculi.
	9. 0000004	0. 95424253
	9. 0000000	0. 95424251
	8. 9999998	0. 95424250

H4

COROL.

COROLLARIUM I.

325. Non est tamen opus, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore investigentur, numeri enim compositi per alios dividi possunt. (§. 68.) adeoque eorum logarithmi inveniuntur per (§. 322.) & cum etiam inter se multiplicari possint, eorum logarithmi inveniuntur per §. 313. & sequi: *Ex: gr: datis logarithmis numerorum 1, 2, 7, 9, 10. reliquorum intermediorum numerorum logarithmi faciliè inveniuntur. Nam logarithmus numeri 9 bisectus dat logarithmum 0.47712125 numeri 3 (§. 314.); 10 : 2 = 5, ideoque si à logarithmo denarii subtrahatur logarithmus binarii, prodibit logarithmus quinarium sive 5. (§. 322.) quia $2 \cdot 3 = 6$. Logarithmus numeri 6 prodit additis logarithmis numerorum 2 & 3, similiter quoniam $2 \cdot 4 = 8$ logarithmus 8 habetur si addantur logarithmi ipsorum 2 & 4 ipsius verò 4 si addantur logarithmi 2 & 2.*

SCHOLIUM II.

326. Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 20000 & à 9000 ad 100000 primus construxit Henricus Briggs Professor Geometriæ Savilianus in Academia Oxoniensi ex consilio tamen primi inventoris Neperi. Lacunam inter 20000 & 90000 mox explevit Adrianus Vlacus. In libellis vulgaribus habetur tantum canon logarithmorum pro numeris ab 1 usque ad 10000.

COROLLARIUM II.

327. Cum logarithmi sint fractiones decimales (§. 323. 281.) decupla verò decimalium sint denominatores (§. 281.) hoc est integra (§. 51.), decuplis logarithmorum sola eorum integra augebantur (§. 210) sed eorum integra sunt characteristicae (§. 308. 323.) decuplis igitur logarithmorum solæ non nisi characteristicae augebuntur: hoc est logarithmi decuplorum
idem

iidem sunt excepta characteristica.

PROBLEMA XXXII.

328. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in canone continentur.*

RESOLUTIO.

I. Resecentur 4 notæ ad sinistram numeri dati, & earum ex canone excerpatur logarithmus.

II. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ.

III. Logarithmus inventus subtrahatur à majore proxime sequente in canone.

IV. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium, ita notæ residuæ numeri dati ad differentiam logarithmicam per Problema XXIX §. 276. inveniendam.

V. Addatur hæc logarithmo prius invento minori, summa erit logarithmus quæsitus.

Ex: gr: Quaeratur logarithmus numeri 92375. Reseca 4 notas 9237 & his notis respondentis logarithmi 3. 9655309 characteristicam auge unitate.

Hinc è Logarithmo numeri

$$\begin{array}{r} 9238 = 3. 9655780 \text{ subduc} \\ \text{logar: num: } 9237 = 3. 9655309 \text{ relinquitur dif-} \\ \text{ferentia Tabularis} \quad \quad \quad 471. \end{array}$$

Inferatur: 10 : 471 = 5

$$5 \quad \quad \quad 2 : 471 : 1 : 235$$

Jam minori logarithmo addatur differentia inventa

Summa est log: quæsitus

DEMONSTRATIO.

Quoniam canon logarithmorum posita progressione Geometrica decupla ab unitate & Arithmetica nume-

numerorum naturalium à zero incipiente constructus fit (§. 323.) iidem erunt logarithmi decuplorum & in nostro casu numerorum 9238, 9237, qui & 92380, 92370 exceptâ characteristica (§. 327.) Porro cum *per operationem* characteristica in nostro casu unitate augetur eò ipso numeri propositi decuplum sumitur (§. 312.) hoc est qui fuit 9238 erit 92380, & qui fuit 9237. erit 92370; consequenter cum *per eandem operationem* differentia logarithmorum ipsis respondentium inquiritur, decuplorum logarithmorum differentia obtinetur (§. 324.) Sed siquidem datus numerus 92375 nequè fit decuplum numeri 9238, nam est minor 92380, nequè etiam decuplum numeri 9237, nam est major 92370; Est igitur medius inter decupla ista, atquè adeo & logarithmus ejus est medius inter logarithmos decuplorum (§. 305.) Hinc tandem quoniam differentia decuplorum 10 respondet differentia logarithmorum 471 addenda logarithmo minori, ut prodeat logarithmus decupli (§. 294.), differentia medi à decuplo, sive notæ 5 resectæ respondet differentia logarithmorum 235 addenda eidem logarithmo decuplorum minori ut prodeat logarithmus medius decuplorum (276. 294.) hoc est logarithmus numeri quæsit 92375 (§. 305.) *Q.e.d.*

Expositione utimur in demonstrando ut non nihil difficilioribus claritatis affulgeat.

COROLLARIUM I.

329. Quoniam eadem demonstratio de centuplis millecuplis etiam procedat; si duæ notæ ad dextram resectæ residuæ maneant, erit differentia centuplorum ad differentiam logarithmorum centuplorum vel si tres notæ residuæ ad dexteram, erit differentia millecuplorum ad differentiam logarithmorum millecuplorum addendam logarithmo minori ut prodeat logarithmus millecuplus (§. 294.) sicut differentia
medii

medii à millecuplo, five notæ tres residuæ ad differentiam logarithmorum millecuplorum addendam logarithmo millecuplorum minori ut prodeat logarithmus medius inter millecuplos (§. 276. 294.) hoc est si nota ad dexteram resecta 1. sumatur regulæ trium terminus primus 10 si duæ 100, si tres 1000. Sed

COROLLARIUM II.

330. Siquidem differentię numerorum differentiis logarithmorum proportionales non sint, (§. 126. 277.) crescente vero factore uno mediorum factum, consequenter quartus proportionalium crescere debet (§. 58. 276.) ne error qui jam per superiora in millionesimis vitari non potuit (§. 277.) sensibilior evadat, hoc modò inquiri possunt logarithmi numerorum notis 7. tantum respondentes.

SCHOLIUM.

331. Nihilominus tamen in nostro casu adeò exactum logarithmum reperimus (§. 328.) ut accuratior in tabulis majoribus Brigii non occurrat.

PROBLEMA XXXIII.

332. Invenire logarithmum fractionis propriæ, hoc est cujus numerator minor est denominatore.

RESOLUTIO.

I. Logarithmus numeratoris subtrahatur à logarithmo denominatoris.

II. Residuo præfigatur signum subtractionis —

Ex: gr: Quærendus est logarithmus fractionis. $\frac{3}{7}$

Logarithmus 7. = 0.8450980

Logarithmus 3. = 0.4771213.

Logarithm: $\frac{3}{7}$ = — 0.3679767.

DEMONSTRATIO.

Cùm fractio sit quotus ex divisione numeratoris per

per denominatorem emergens (§. 63.) logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 321.) adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus è minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 92.) *Q.e.d.*

SCHOLIUM.

333. *Nec mirum est fractionis propriæ logarithmum esse negativum. Fractio enim est minor unitate (§. 193.) Sed unitatis logarithmus est 0 (§. 323.) ergo logarithmus fractionis est nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

334. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris à logarithmo numeratoris subtrahatur. (§. 63. 321.)

Logarithmus 9 = 0. 9542425

Logarithmus 5 = 0. 6989700

$$\frac{9}{5} = 0. 2552725$$

COROLLARIUM II.

335. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt. (§. 196.) eodem modo inveniuntur eorum logarithmi

Logarithmus 23 = 1. 3617278

Logarithmus 7 = 0. 8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0. 5166298.

PROBLEMA XXXIV.

336. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non invenitur.*

Imò

R E S O L U T I O.

imo. Si logarithmi (qui convenit numero) characteristica fuerit 3 (§. 312.)

I. Logarithmus proximè minor dato subtrahatur à proximè majori, itidemquè à logarithmo dato.

II. Inferatur ut differentia prior ad 10, vel 100, vel 1000 ita differentia 2da ad partes decimas, centesimas millesimas per Problema XXIX. §. 276.

III. Addatur differentia inventa ei numero, qui logarithmo proximè minori in tabulis respondet, sic habebitur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex: gr: Quæratnr numerus respondens logarithmo 3 . 7589982.

Logarithmus proximè major. 3 . 7589982

Logarithmus proximè minor. 3 . 5589875.

Differentia 1ma 757.

Logarithmus datus — 3 . 7589982.

proximè minor 3 . 5589875.

Differentia 2da 107

757 : 100 = 107 : 14

Cùm numerus logarithmo minori conveniens sit

5741, quæsitus erit 5741 $\frac{14}{100}$

2da. Si logarithmi dati characteristica fuerit 0, 1, vel 2

I. Excerptatur numerus respondens logarithmo proximè minori datò.

II. Characteristica mutetur in 2, vel 3; sic mutatâ.

III. Quæratnr in majore ordine decimali logarithmus proximè, minor dato; qui eidem respondet numerus habebit numeratorem fractionis decimalis tot notarum, quot notæ reliquæ residuæ sunt ab integris.

Ex: gr: Quæratnr numerus logarithmo 1.9201662

respon-

respondens. Cum in tabulis proxime minori isto respondeat numerus 83 integra, characteristica in 3 mutata, logarithmo 3. 9201233 proximè minori datò majoris ordinis decimalis respondeat numerus 8320; est itaque

quaesitus 83 $\frac{20}{100}$ Quod si fractionibus his non fueris contentus, minores istis per casum primum inveniiri possunt.

DEMONSTRATIO.

Cum logarithmi in partibus millionesimis integris accuratè respondeant (§. 323.), datò per hypoth: non accuratò logarithmò, numerus quoque non accuratus sed cum fractione aliqua respondebit (§. citat: 305.) consequenter ut logarithmus datus inter logarithmos minorem & majorem, ita numerus eidem respondens inter unum atque alium proximè integrum majorem numerum erit medius (§. 305. 324.) Si itaque inferatur ut differentia logarithmorum integrorum ad numerum sibi respondentem, hoc est ad unum integrum in aliquot partes divisum, ita differentia partium logarithmicarum ab integro logarithmo ad partes unius numeri integri sibi debitas addendas numero qui respondet logarithmo minori (§. 276.) habebitur numerus propè verus respondens logarithmo dato (§. 327. 305.) Q. e. primum.

Quoniam per hypoth: logarithmo proximè minori dato numerus integer respondens sumitur, & characteristica logarithmi mutatur, tot zeri accedunt integro numero, quot characteristicae unitates accessere (§. 312.) adeoque dictus numerus per tot zéros cum præfixa unitate multiplicatus (§. 98.) Quod si jam ii zeri cum præfixa unitate sumantur pro denominatore fractionis quaesitæ, quæ per n. r. logarithmo non accurato respondet omnino, multiplicabitur numerus integer per denominatorem (§. cit:) adeoque reducetur ad

cetur ad fractum (§. 196.) consequenter istæ notæ ab integris residuæ cum in loco zerorum, hoc est numeratoris per demonstrata sint, erunt numerator fractionis quæsitæ (§. 206. 281.) *Q. e. alterum.*

COROLLARIUM.

337. Cum per demonstrata integris manentibus solæ fractiones in majore ordine decimali augeantur, idque ordine naturali, si sumatur logarithmus mutata characteristica proximè major datò, sumetur fractio major verà quam proximè. Denominator verò præter unitatem tot zerorum erit, quot characteristicae unitates accessere (§. 336. 312.) atque si characteristica una notâ aucta, fractio erit in decimis, si 2, in centesimis, si 3, in millesimis.

SCHOLIUM.

338. Si habeatur canon magnus Brigii ad manus, ubi characteristica 5, (§. 326.) datò logarithmò non accurato cum characteristica 3 imò 4 possunt fractiones inveniri modo posteriori.

PROBLEMA XXXV.

339. Invenire numerum convenientem logarithmò majori iis qui in tabulis continentur.

RESOLUTIO.

I. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000 donec relinquatur logarithmus ultimò tabulæ minor.

II. Quærat numerus ei respondens (§. 326.) &c

III. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus.

Ex: gr: Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982; subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4. 0000000, ut relinquatur 3. 7589982, cui respon-

det numerus 5741 $\frac{14}{100}$, ducatur in 10000, factum 57411400 erit numerus quæsitus.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Dum *per hypoth.* logarithmus unus ex altero subtrahitur, iis respondens numerus unus per alterum dividitur (§. 321. 322.) quod si adeo ponamus logarithmo majori respondentem numerum ignotum X , logarithmo minori A , differentię logarithmorum numerorum respondentem L , differentiam autem ipsam logarithmorum dicamus D , respondebit huic differentię D numerus $X : A = L$ (§. cit.) multiplicetur jam utrumquę *ex hypoth.* per A , erit $X = AL$ (§. 83. 60.); sed cū numeri multiplicantur, logarithmi iis respondentes adduntur (§. 313. 322.) Si itaque logarithmus datus major sit M , minor N , respondebit factum numerorum AL summę logarithmorum $N + D$ (§. cit.) adeoque ipsi M (§. 1294.) hoc est numerus inventus dato logarithmo majori. *Q.e.d.*

SCHOLIUM.

340. Facile apparet subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in tabula occurrentis, modò per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio taediosa evadit.

PROBLEMA XXXVI.

341. Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.

RESOLUTIO.

I. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulę five numeri 10000, hoc est ille ab hoc subtrahatur. Nam additio negativı ad positivum est destructio positivı negativo æqualis & c. contra

II. Logarithmo residuo conveniens numerus quæritur (§. 336.)

Dico hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

Ex: gr. Quæritur fractio respondens logarithmo defectivo

defectivo 0.3679767. Hic
 ex 4.0000000. subducitur
 relinquit 3.6320233. cui convenit numerus
 4285 $\frac{71}{100}$ (§. 336.) est ergo fractio quæsitæ

$$\begin{array}{r} 428571 \\ 1000000 \end{array}$$
 (§. 207.)

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 63.) erit unitas ad fractionem, ut denominator ad numeratorem (§. 61) Itaque ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 313.) Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 280.) *Q.e.d.*

PROBLEMA XXXVII.

342. *Datis tribus numeris invenire quantum proportionalem.*

RESOLUTIO.

- I. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
 II. A summa subtrahatur logarithmus primi. Residuum est logarithmus quarti quæsitæ (§. 276. 322.)

Ex: gr: Sint numeri dati 4, 68, 3.

Logar: 68 = 1.8325089

Logar: 3 = 0.4771213

Summa = 2.3096302

Logar: 4 = 0.6020600

Logar: quæf: = 1.7075702

Cui in tabulis respondet numerus 51.

SCHOLIUM.

343. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet. Tyrones hanc de loga-*

logarithmis doctrinam tantisper seponant donec Trigonometriae operam dederint:

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXVI.

344. Fractio decimalis est, cujus denominator est articulus quidam primarius 10, 100, 1000, 10000, &c. (§. 280.)

COROLLARIUM.

345. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla. (§. 120.)

Ex: gr: Si fuerit fractio decimalis $\frac{342857}{100000}$, ea

dem æquivalet huic seriei:

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000} \text{ nam}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{40000}{100000} \text{ \& } \frac{2}{100} = \frac{2000}{100000} \text{ \&c. (§. 199.)}$$

Cujus seriei denominatores 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 in ratione decupla progrediuntur.

COROLLARIUM II.

346. Quoniam logarithmi progressionis Geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5. (§. 323.)

In fractionibus verò decimalibus denominatorum sunt dicta progressio (§. 344.) cui logarithmi constantè respondent, denominatorum in locum logarithmi eorum commodè substitui possunt. Si itaque fractiones decimales sub forma numerorum integro-

rum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut

+ 4

$$+ \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000} \text{ scribatur}$$

3. 42857. (§. 281.) loco denominatorum numeratoribus solitariè positis tanquam apices possunt adjici

logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342852}{100000}$ scribimus:

3^o 4' 2" 8''' 5^{iv} 7^v

COROLLARIUM III.

347. Quoniam apices (qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium) in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, cæteris omissis, veluti in nostro casu 3. 42857^v.

COROLLARIUM IV.

348. Cùm apices isti omnes non tantum sunt logarithmi, sed & characteristica logarithmorum denominatorum (§. 308.) quivis apex ultimus fractionis decimalis erit characteristica logarithmi denominatoris. (§. cit.) consequenter

COROLLARIUM V.

349. Cùm characteristica tot in se continet unitates quot denominator zeros (312.) apex etiam ultimæ notæ tot continebit unitates, quot denominator zeros; sed quot sunt in denominatore zeri, tot notæ numericæ puncto ab integris secernuntur (§. 281.) Ergo quot notæ ab integris puncto secernuntur, tot unitatum erit apex notæ ultimæ; adeoque omissis apicibus fractionis decimalis logarithmus sciri potest: erit scilicet logarithmus earum tot unitatum, quot notæ ab integris puncto separatæ. Ex: gr: fractionis 9. 245 apex sive logarithmus ^{iv}; ipsius 0. 00345 logarithmus ^v.

DEFINITIO LXVII.

350. Notæ fractionum decimalium ejusdem
12 ordinis

ordinis dicuntur, quarum iidem sunt denomi-
natores vel apices

Ex: gr: Si duæ fuerint fractiones decimales
o. 42857. & o. 0047, notæ 8 & 4 ejusdem or-
dinis sunt, quoniam utriquæ respondens denomi-
nator est 1000 vel apex III; nam 8 designat

$$\frac{8}{1000} \text{ \& } 4 \text{ denotat } \frac{4}{1000} \text{ (345.)}$$

PROBLEMA XXXVIII.

351. Fractiones decimales addere, vel à se invicem
subtrahere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales eò modò quò nu-
meri integri constant ex notis, quarum unitates in
ratione decupla progrediuntur (§. 346. 44.) notis
ejusdem ordinis sub se invicem collocatis, additio &
subtractio eòdem modò etiam peragitur, ac in nume-
ris vulgaribus (§. 86. 88.) Vide exempla.

I. Additionis.

$$\begin{array}{r} 3. 507824 \\ 0. 00003 \\ \hline 51. 247. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0. 0638 \\ 0. 00569 \\ \hline 7. 123. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54. 754854 \\ 7. 19249 \\ \hline \end{array} \quad \text{II. Subtractionis.}$$

$$\begin{array}{r} 2. 7896 \\ 0. 234 \\ \hline 2. 5556 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0. 87942 \\ 0. 08251 \\ \hline 0. 79691 \end{array}$$

SCHOLIUM.

352. Et enuntiantur etiam eò modò quò numeri
vulgares (§. 49.)

PROBLEMA XXXIX.

353. Fractiones decimales per se invicem multi-
plicare.

RESOL.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 281.) multiplicatio peragitur ut in integris (§. 97.) hoc unice notatò, quòd siquidem apices sunt logarithmi denominatorum (§. 346.) pro facto eorundem in se invicem (ut in multiplicatione fractionum fieri est necesse) (§. 210.) apices factorum secum adduntur. (§. 322. 313.)

Ex: gr: Si multiplicanda fuerit fractio decimalis

$$\frac{42857}{100000} \text{ per } \frac{47}{10000} \text{ hoc est } 0.42857 \text{ per } 0.0047$$

Multiplicatio peragitur communi more (§. 97.) Quoniam verò apex ultimus multiplicandi est 5,

$$\begin{array}{r} 0.42857 \\ 0.0047 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{\& multiplicatoris } 4 \text{ (§. 349.);} \\ \text{summa } 9 \text{ dat apicem ultimum} \end{array}$$

299999

171428

0.002014279

producti. Unde apparet à sinistris adjiciendas esse tres cyphas, quarum prima puncto notata designat locum integrorum (§. 281.)

PROBLEMA XLII.

354. Fractionem decimalem per decimalem dividere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 281.) divisio peragitur ut in numeris integris (§. 100.) hoc unice notatò, quòd siquidem apices sunt logarithmi denominatorum (§. 346.) apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 322. 321.) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit.

Ex: gr: Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857. (§. 353. 184.) nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notae divisoris 4 conveniat apex 3 & notae dividendi

videndi o apex 4. differentia 1 est apex notae primæ quoti 4. Cum adeò quotus incipiat à partibus decimis ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhaereat integrum (§. 281.)

S C H O L I O N.

355. Advertatur Et si in divisione fractionum denominator unus per alium non dividatur, sed quoniam divisio multiplicationi contraria (§. 61. 174.) si inibi logarithmi denominatorum adduntur hic subtrahendi sunt, sed Et ex ipsis logarithmis daretur à Nobis demonstratio, nisi brevitati studeremus. Caeterum non mirum minorem hic per majorem numerum dividi posse, fractio ulique minor per majorem dividi potest. (§. 212.)

P R O B L E M A XXXIX.

356. Invenire Logarithmum fractionis decimalis cujuscunque.

R E S O L U T I O & D E M O N S T R A T I O.

I. Cum fractio decimalis cum integris adhærentibus æquivalet fractioni spuria. e.g. $8.735 = \frac{8735}{1000}$ (§. 281. 194.) logarithmus ejus habebitur per §. 334.

II. Quod si fuerit absque integris adhærentibus ex.gr. 0.324 cum ea æqualis sit $\frac{324}{1000}$ (§. 281.) adeoque fractioni propriè dictæ (§. 194.) logarithmus illius invenietur per §. 332. Invenietur adeò logarithmus fractionis decimalis cujuscunque. Q. e. f. Et d.

S C H O L I O N.

357. Crassius ergo aliquod mendum typis irrepsisse arbitror, quàm ut vir tantus in Mathesi Volfius ea non viderit, qui §. 366. corollario IV. infert pro obtinendo fractionis decimalis logarithmo logarithmum denominatoris, sive characteristicam solam denominatoris

natoris à characteristica numeratoris subtrahendam, id quod etiam in fractione decimali absque integris adhaerentibus in exemplo à Nobis allato facit §.367. ponitque logarithmum dictae fractionis $0.324 \overline{=}$

— I. 5105456 . ac denique generaliter pronuntiat: lidem ergo sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant. Quod nisi de solis fractionibus cum integris adhaerentibus verum est. Nam siquidem fractionis 0.324 logarithmus numeratoris $= 2.5105456$ & denominatoris $1000 = 3.0000000$, logarithmus datæ fractionis erit $= 0.4894544$ (§.346.332.)

DEFINITIO LXVIII.

358. *Fraçtio decimalis exacta est, quæ veram exhibet rationem partis quam designat ad totum.*

Ex.gr. $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit $8:10 = 4:5$. (§.155.)

DEFINITIO LXIX.

359. *Fraçtio decimalis approximans est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel verâ majorem, vel minorem; defectu tamen aut excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.*

Ex.gr: $\frac{3}{7} > 0.42857$; sed < 0.42858 (§.280.) Exprimit adeo fraçtio approximans

14

$$\frac{42857}{100000}$$

42857

100000

rationem non nisi propè veram, defectu
scilicet existente minore quam $\frac{1}{100000}$ & notan-
tur subinde ad finem signo +. aut. —

PROBLEMA XL.

360. Fractiones decimales approximantes adde-
re, vel à se invicem subtrahere.

RESOLUTIO.

Addantur & à se invicem subtrahantur, ut fracti-
ones exactæ (§. 351.) & locus ultimus à dextris
pro incerto habeatur. (§. 359.)

PROBLEMA XLI.

361. Fractiones decimales approximantes per se
invicem multiplicare.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Multiplicentur eò modo quò fractiones exactæ
(§. 353.) & cum aut unus, aut uterque factor pos-
sit esse approximans diligenter attendatur, quousque
incertitudo in notis facti finitimis se extendat; id
quod ex legibus ipsius multiplicationis, atque addi-
tionis multiplo-um incerti factoris apparebit. En e-
xempla

I.

$$\begin{array}{r}
 4.56324^{+} \\
 \quad 0.12 \\
 \hline
 912648 \\
 456324 \\
 \hline
 0.5475888
 \end{array}$$

Quoniam nota ultima mul-
tiplicandi 4, incerta factum
quoque 8 est incertum simi-
liter multiplicatoris nota 1
ducta in incertum 4 producit
4, quod incertum additum

certo 4 summam facit incertam 8, duae ergo notae 8 & 8
à dextris sunt incertae. Sed si fuerit uterque factor ut
in exemplo allato approximans, nulla nota certa erit
in facto. Imò si ponatur unus factor minor exempli
approximans nulla nota facti certa erit.

II.

II.

$$\begin{array}{r}
 4.56324 \\
 \underline{0.12 \text{ ---}} \\
 912648 \\
 \underline{456324 \text{ ---}} \\
 0.5475888
 \end{array}$$

Nam cum per incertum 2 totus multiplicandus multiplicatur, totum factum est incertum, quod additum facto ex notis certis summam reddit incertam.

PROBLEMA XLII.

362. Fractiones decimales approximantes per exactas decimales, aut contra, aut etiam approximantes per approximantes dividere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Dividantur ut §. 354 fieri præcepimus, & similiter ut in multiplicatione, cum aut divisor, aut dividendus, aut denique uterque illorum possit esse fractio approximans, probè conspiciatur, quibus in notis dividendi certitudo notarum quoti evanescat, id quod leges divisionis imò, & addo multiplicationis quoti in divisorem exactum aut approximantem itemque subtractionis indicabunt.

Exemplum I.

0.02 (4.568+) 228.4+ Cum hic divi-

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 \underline{0 \ 5} \\
 4 \\
 \underline{16} \\
 16 \\
 \underline{8} \\
 8 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

for exactus & dividendus tantum approximans, ultima nota divisoris 2 in ultima nisi nota dividendi incerta continebitur (§. 359.) adeoque ultima no-

ta quoti solum incerta evadit. Sed si ponas.

Exempl: II.

0.02+ (4.568.) Quotus idem, sed totus incert-

incertus. Quod si fuerit

Exempl: III.

$$\begin{array}{r}
 3.82 - (21.3456) \quad 5.59 \text{ \&c.} \\
 \underline{19 \quad 10} \\
 2245 \\
 \underline{19 \quad 10} \\
 3356 \\
 \underline{30 \quad 56} \\
 300
 \end{array}$$

ima 5 non nisi certa est: nam divisoris nota ima 3 certa in 21 certo utique certè continetur postquam verò quotus iste certus multipli-

tatur per incertam divisoris notam 2, ac deinde multipla incerti in alias notas irrepunt (§. 361.) omnia incerta evadunt; hoc est à facto incerto etiam residuum post subtractionem incertum.

SCHOLIUM.

363. *Alios casus brevitatis causa prætermittimus.*

CAPUT X.

De fractionibus sexagesimalibus.

DEFINITIO LXX.

364. *Fractiones sexagesimales sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla.*

SCHOLIUM.

365. *Si integrum sit 1, fractiones istiusmodi sunt*

$$\frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \frac{1}{216000} \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM.

366. *Quoniam logarithmi progressionis*

Geometricæ 1, 60, 3600, 216000, \&c.

Sunt 0, 1, 2, 3, (§. 305.) Si fractio-

fractiones sexagesimales instar numerorum integro-
rum scribendæ, numeratoribus solitariè positis eò
modo quò in fractionibus decimalibus (§. 346.)
logarithmi locò denominatorum tanquam apices ad-
fici possunt. Ita locò fractionis $\frac{3}{1}$ scribimus 3° &

locò $\frac{35}{60}$ ponimus 35° & $\frac{16}{3600} = 16''$ &c.

DEFINITIO LXXI.

367. Pars sexagesima integri dicitur mi-
nutum primum, pars sexagesima minuti pri-
mi minutum secundum, & sexagesima secun-
di minutum tertium & ita porro, dicuntur
etiam scrupula.

COROLLARIUM.

368. Minuti adèò primi apex sive index est 1, se-
cundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 366.)

SCHOLIUM.

369. Hac ratione fractiones reducuntur ad nume-
ros integros, ut integrorum instar tractari possint.

PROBLEMA XLIII.

370. Fractiones sexagesimales addere.

RESOLUTIO.

Additio eòdem prorsus modò peragitur quò nu-
meri heterogenei in unam summam colliguntur.
(§. 88.)

Ex: gr: $85^{\circ} \quad 46' \quad 8'' \quad 15'''$
 $17 \quad 20 \quad 15 \quad 40$
 $14 \quad 18.$

$53^{\circ} \quad 20' \quad 41'' \quad 55'''$

PROBLEMA XLIV.

371. Fractiones sexagesimales à se invicem sub-
trahere.

RESOLUTIO.

Subtrahuntur eò modò quò numeri heterogenei
(§. 91.)

$$\begin{array}{r} \text{Ex: gr:} \quad 28^{\circ} \ 15' \ 4'' \ 20''' \\ \quad \quad \quad 17 \quad 29 \quad 18 \quad 45'' \\ \hline \quad \quad \quad 10'' \ 45' \ 45'' \ 35''' \end{array}$$

*Nimirum unitas mutuo accepta à specie majore hic
valet 60. Ita $1'' = 60'''$ $1' = 60''$ $1^{\circ} = 60'$*
(§. 367.)

PROBLEMA XLV.

372. *Fractiones sexagesimales per se invicem mul-
tiplicare.*

RESOLUTIO.

Multiplicatio hæc coincidit cum multiplicatione
decimalium, nisi quod ex specie minori abiciatur to-
ties sexagenarius quoties fieri potest, & tot speciei
proximè majori addantur unitates, quoties sexage-
narius fuit abjectus (§. 367.) id quod divisio per
60 prodit. (§. 195.)

*Ex: gr: Si multiplicandus $3^{\circ} \ 15' \ 38''$ multi-
plicator $2^{\circ} \ 18' \ 47''$, duc singulas partes multipli-
candi 1mò in 47, 2dò in 18, 3tiò in 2: Erit
factum ex 47 in 38 = 1786 minutis quartis = $29'''$
 46^{iv} . Scribuntur adeò 46 pro specie minima in-
fra lineam cum suo apice, & 29 reservantur
speciei proxime sequenti addenda: cum igitur fa-
ctum ex 47 in 15 = 705 additis $29'''$ pro-
dibunt $734''' = 12'' \ 14'''$. Scribuntur adeò $14'''$
infra lineam & $12''$ reservantur facto proxime
sequenti ex 3° in 47 addenda. Eòdem modò ubi
perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia
quæ in unam summam collecta exhibent factum
quesitum*

quæsitum $7^{\circ} 32' 30'' 38''' 46^{IV}$, aut si prope verum quæsieris $7^{\circ} 32' 31'''$, cum species proximè major dimidium illius superet, aut 30 major fuerit. Vide exemplum.

$$\begin{array}{r}
 3^{\circ} \quad 15' \quad 38'' \\
 2^{\circ} \quad 18' \quad 47'' \\
 \hline
 2 \quad 33 \quad 14 \quad 46^{IV} \\
 58 \quad 41 \quad 24 \\
 6 \quad 31 \quad 16 \\
 \hline
 7^{\circ} \quad 32' \quad 30'' \quad 38''' \quad 46^{IV}
 \end{array}$$

S C H O L I O N.

373. Propter tadia divisionis declinanda constructus est Canon hexacontradon, qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex 38 in 47 = 29, 46. Ratio constructionis ex operatione in Problemate percepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco Pythagorico (S. 94.) factorum unum à latere, alterum in fronte Canonis describi.

P R O B L E M A XLVI.

374. Fractiones sexagesimales per se invicem dividere.

R E S O L U T I O.

Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus, nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus S. 372. & ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris imâ, ista reducenda sit ad speciem proximè minorem, & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

Ex: gr: Si $7^{\circ} 32' 30'' 38''' 46^{IV}$ dividere jubeamur per $2^{\circ} 18' 47''$; quare quoties 2 in 7 continetur.

contineantur, & quoti locò scribe 3°. Duc 3 in 2° 18' 47" & factum 6° 56' 21" subtrahere ex 7° 32' 30" ut relinquantur 36' 9". Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eodem modò continua, donec ea tandem fuerit absoluta, quemadmodum ex typo exempli manifestum.

$$2^{\circ} 18' 47'' \quad (7^{\circ} 32' 30'' \quad 38''' \quad 46^{iv}) \quad 3^{\circ} 15' 38''$$

<hr/>			
36	9	38	
34	41	45	
<hr/>			
I	27	53	
	87	53	46
	87	53	46
<hr/>			
0			

SCHOLIUM. I.

375. Non ab simili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque absolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quae olim in divisione mensurae linearum obtinuit. Sed non licet florenos, grossos, solidos per florenos, grossos, solidos multiplicare. (§. 216.) Multiplicatio verò decimalium & sexagesimalium cum sit fractionum multiplicatio, apparenter tantum homogeneorum est multiplicatio; sed reuera divisio (§. 211.)

CAPUT XI.

De nonnullis praxim concernentibus.

SCHOLIUM.

376. Ut praxi etiam provideatur, magis necessaria in usu civili adnotabimus. Praeter alias varias & prope innumeras apud gentes mensuras haec sunt etiam.

MENSU-

MENSURARUM GENERA,

4. Grana faciunt 1. *Digitum*
 4. *Digiti* 1. *Palmum*
 4. *Palmi* 1. *Pedem*

Ex 16. itaque digitis Pes componitur, majori tamen quantitate Digitorum

1. *Pes* (vulgo continet 12) *Digitos*
 (apud Geometras 10)
 vulgo 12

1. *Digitus* (apud Geom: 10) *lineas*

377. *Pedum nonnullorum diversitatem repræsentat*
 Tabula sequens. Si scilicet Pes Regius Parisinus communi divisione in 12 Digitos, Digitus in totidem lineas, linea in 10 particulas, atque adeo universim in 1440 particulas dividatur.

Pes Regius		Constantino-	
Parifinus	1440	politani:	3120
Rhenanus	1391 $\frac{3}{10}$	Bononiensis	1682 $\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat:	1282 $\frac{3}{4}$
Londinensis	1350	Norimberg:	1346 $\frac{3}{4}$
Svecicus	1320	Viennensis	1401 $\frac{1}{2}$
Danicus	1403 $\frac{2}{5}$	Dantiscanus	1271 $\frac{1}{2}$
Venetus	1540	Vilnensis	1446
Halenfis	1320		

378. Bion (a) diversitatem pedum ejusmodi assignat. Si scilicet fuerit pes Regius Parisinus 1740 particularum erit.

Rhenanus	1390.	Viennen-	1400.
Romanus	1660.	sis	
Londinen-		Dantiscan-	1750.
sis	1350.	Amstero-	
Svecicus	1210.	damensis	1250.
Venetus	1430.	Bruxellen-	
Constanti-		sis	1601.
nopolit-		Mediola-	
tanus	3140.	nenfis	2640.
		Minor	1761.

Id quod ex originaria cujuscunque pedis exacta mensura resolvendum foret. Priorem tamen pedum rationem assensus communis omnium probat.

379. Quemadmodum Pes, ita ulna pro varietate regionum & urbium varia est. Alexander ab Alexandro (b) eam ita describit. Si ambas inquit explices manus & in longum protrahas, à pectore linea ducta ulna dicitur.

Sunt quae ex pedibus 2, uti nostra Viennensis, Dantiscana, Rhenana, teste R. P. Reuff, sunt quae ex 3, uti Viennensis perhibente R. P. Froelich; & sunt ulnae quae ex paucioribus vel pluribus quam 3 pedibus componuntur; quemadmodum ulna Parisina quae eodem Bione teste 3 pedibus & 8 digitis parisinis constat.

380. Cubitus facit pedem cum dimidio. Eadem quoque mensura est Passus communis.

Orgia

(a) Traité de la construction & principaux Usages des instrumens à la Haye, 1723. p. 93.

(b) lib. 2. cap. 20. Dierum Genialium.

Orgia 6 pedes alio nomine: *Hexapeda*. Gallis *Toise*.

Spithama Eodem Alexandro ab Alexandro teste est mensura manūs expansae à magno digito ad minimum quantum protenditur palmo. Sed si pollicem tantum explices & indicem, *Lichas* nuncupatur.

381. *Fuere etiam Romanorum mensurae Via, Iter & actus. Iter esse constitit (ait laudatus Alexander) jus eundi per fundum alienum hominis tantum.*

Actum hominis & jumenti. Viam hominis jumentum & vehiculi. Via in porrecto 8, in anfractu 16 pedes lata erat.

Iter pedes 4 tantum latitudinis. Actus duplex; simplex scilicet & quadratus.

Simplex, pedes 4 latitudinis, longitudinis verò pedes 120 habebat.

Quadratus, qui in longitudinem & latitudinem 120 pedibus terminabatur. Is ipse quadratus actus alio nomine Plethrum audiebat. Unde duo tales actus Diploterum.

382. *Jugerum tantum terrae spatium, quod iugo boum uno die exarari possit. longum fuit 240 latum verò 120 pedibus. Itaque Diploterum, sive 2 actus quadrati faciebant 1. jugerum.*

6 Jugera

1. Stadium

8 Stadia

1. Milliare Italicum

Ita idem Alexander ab Alexandro l. cit. Id quod legitur 1. Reg: 14 v. 14. *In media parte jugeri, quam par boum in die arare consuevit. Nostro idiomate reddit R. P. Wujek: Na polowicy staja, ktore zwykto para wolow na dzien zorac.* Consentiantque interpretes loci hujus. R. P. *Sanctius* jugerum (inquit) spatium est in agro, quod uno die, quasi legitime dimenso par boum arat.

383. *Stadium quoque varium fuit. Sexcentos pedes*

des græcos teste Gellio (c) complectebatur, sed jam minores, jam majores. *Stadium Olympicum* Romanis pedibus 625 constabat referente Plinio (d). *Alexandrinum* verò 720 Romanis pedibus perhibente Weydlero (e). *Hippicum* 4, *Dolichus* 12 stadia complectebatur.

Ægyptii Schaenis utebantur; quorum uni Herodotus 60 stadia, Plinius verò 40 tantum tribuit.

Persarum Parasanga 30 stadiis contineri perhibetur.

Romanorum mensura in determinandis majoribus intervallis milliare fuit, quod etiam vocabant *lapidem*, inde sumpto nomine, quòd scilicet post mille passus, seu 5000 pedes columnas viis in publicis erigerent.

384. Milliariis Germanici exactior quantitas ex his componitur.

5 Pedes faciunt	1 Passum. sc: Geom:
125 Passus	1 Stadium
8 Stadia	1 Milliare Ital:
2 Milliaria Ital:	1 Leucam
2 Leucæ	1 Milliare Germ:
6 Vorstæ Rufforum	1 etiam Mill: Germ:

385. Dividuntur milliaria in minora media & maxima. Præcipuas communium milliariarum diversitates sequens Tabula exhibet, quam ex R. P. Mangold desumpsimus.

<i>Milliare Germanicum</i>	<i>Continet Pedes Rhendnos</i>
<i>Commune</i>	20000
<i>Gallicum</i>	15270
<i>Helveticum</i>	26666
<i>Italicum & Turcicum</i>	5000
<i>Polonicum</i>	19988
<i>Svecicum</i>	30000
<i>Anglicum</i>	5454
<i>Hollandicum</i>	24000

Millia-

(c) Not: Attic: l. i. c. i. (d) Hist: nat: l. 2. c. 23.

(e) In Geograph: Gen: §. 4.

Milliari Germanico maximo Pedes Rhenani passim adnumerantur 23716.

386. Accuratiùs definitur milliare per dimensiones graduum terræ, cui uni 15 milliaria respondent, atque adeò cum circumferentia terræ 360 gradus complectatur, *Orbita terræ erit 5400 milliarium* (§. 276.) Unius ex his milliariis quantitas ex optimis dimensionibus statuitur *pedum Parisinorum 22900* numero rotundò, loco 22888.

P R O B L E M A XLVII.

387. *Data longitudine lineæ in mensura e. g. Parisina 22900 pedum, invenire eandem in mensura alia e. g. Nostra, cujus ad priorem datur ratio.*

R E S O L U T I O.

Quoniam Pes Parisinus est ad nostrum ut 1440 ad 1446 (§. 377.) inferatur (§. 285.)

$1446 : 1440 = 29000 : 22804 \frac{236}{241}$ Erit proinde milliare unum Orbitæ terræ 22804 cum dimidio fermè Pedum nostratium (§. 386.)

C O R O L L A R I U M I.

388. Non absimili modo aliis mensuris definita spatia terræ sive areæ in alia quavis mensura invenirentur. e. g. Si quæretur decempedæ Parisinæ 100 quod decempedas Viennenses faciant.

C O R O L L A R I U M II.

389. Quod si quæretur e. g. Hexapedæ Parisinæ 1000 quot decempedas Viennenses faciant. Hexapedis in numerum pedum conversis, inquiruntur Pedes Parisini respondentes pedibus datarum Hexapedarum (§. 284.) qui tandem in decempedas convertuntur (§. cit. & 100.)

In nostro casu 1000 Hexapedæ Parisinæ facerent

$583 \frac{3}{4}$ Decempedas Viennenses.

390. VARIA PONDERUM GENERA.
PONDERA MERCATORUM

Centenarius	<i>Cetnar</i>	appendit	100	Libras
Libra	<i>Funt</i>		16.	Uncias
Uncia	<i>Uncya</i>		2.	Semuncias
Semuncia	<i>Lot</i>		4.	Drachmas
Drachma			4.	Denariolos
Denariolus			2.	Obolos

391. PONDERA AURIFABRORUM
PRO ARGENTO

Selibra argenti	sive	Marca	
<i>Grzywna</i>	appendit	16.	Semuncias
Semuncia		4.	Drachmas
Drachma		4.	Denariolos
Denariolus		2.	Obolos

PRO AURO.

Bes auri sive	Marca	24.	Carattos
Carattus		4.	Grana
Granum		3.	Granula

392. PONDERA PHARMACOPÆORUM

Libra	continet	12.	Uncias
Uncia		2.	Semuncias
Semuncia		4.	Drachmas
Drachma		3.	Scrupulos
Scrupulus		20.	Grana

Granum *Piperis* grano mediocri æquiparatur.

393. Sequens tabula ex R. P. Mangold desumpta
librarum diversitatem exhibet qua ratione scilicet
reliquae à libra Hamburgensi differant.

Hambur-

Hamburgensia pondo	§	112. Dantisci
	§	116. Rigæ
	§	105. Lisabonæ
	§	104. Livorni
	§	106. Sevilix in Hisp:
100	§	98. $\frac{2}{51}$ Amstelodami
	§	101. $\frac{41}{53}$ Londini
	§	103. $\frac{41}{53}$ Lipsix & Be-
Equiponderant	§	rolini
	§	93. $\frac{49}{107}$ Norimbergæ
	§	86. $\frac{22}{23}$ Viennæ & Ra-
	§	tisbonæ
	§	129. $\frac{38}{53}$ Vilnæ

*Tabulae partem ad 100 pondo per regulam trium
reduximus inferendo e.g. pro Amstelodamensi:*

Hamb: Amste: H. A.

$$102 : 100 = 100 : 98 \frac{2}{51}$$

394. *Pro Inveniendâ verò ratione nostræ cum
Hamburgensi libra, siquidem 4 Berolinensia pondo
Vilnensibus 5 æquivalent. Inferendum erat imò*
Berol: Hamb: B. H.

$$103 \frac{41}{53} : 100 = 4 : 3 \frac{47}{55} \text{ \& 2dò (§.14, 285.)}$$

Hamb: Viln: H. V.

$$3 \frac{47}{55} : 5 = 100 : 129 \frac{38}{53}$$

Id quod adnotasse pro similibus casibus visum est.

CAPUT

CAPUT XII.

De Arithmetica calculatoria.

DEFINITIO.

395. *Arithmetica calculatoria est, quæ characterum locò calculis utitur. In principiis verò utraque convenit.*

HYPOTHESIS I.

396. *Calculorum dispositio ab imo sursum procedit, ita ut inferiores calculi unitates simplices designent, superiores verò valoris augmentum decuplum expriment.*

HYPOTHESIS II.

397. *Numerus 5 unicò notatur calculò, qui laevam unitatum ita occupat, ut interjectum relinquatur spatium. Zerorum vicem calculi, sibi superimpositi suppleant aut calculus ab aliis distinctus. In hac charta stellula signabit cyphras.*

PROBLEMAT A.

398. *Numerum quemcunq̃ e. g. 4680456. calculis designare.*

RESOL; Inferius unitates, superius deinde Decades, centenarios &c. collocabis; ut Tabula exhibet.

Milliones	0000
Centenarii Mill:	o o
Decades Millium	o 000
Millenarii	*
Centenarii	0000
Decades	o
Unitates	o o
	<hr/> 4680456

ADDERE

I. Calculos ita dispone horizontaliter, ut ordinis ejusdem unitates sibi respondeant. Deinde

II. Quemadmodum in Arithmetica vulgari, ab ordine

dine infimo initium operationis duces, & unitates decadum ordini proximè fequenti per totidem calculos adiciēs.

Ex: gr: Dentur summandi. Erit summa

o	oooo	*	oo
o oo	o	ooo o	oo
o ooo	o ooo	o o	oo
578	458	1036	2072

S U B T R A H E R E.

Subtrahendo ad minuendi dexteram collocato omnia fiunt ut in Arithmetica communi. Quodfi major è minori subtrahendus, calculus ex proxime fequenti ordine pro decade inferiori ordini adjungendus.

Minuendus	Subtrahen:	Differen:
o		
ooo	o o	o o
o oo	o ooo	o oooo
o	oo	ooo
1375	682	693

M U L T I P L I C A R E.

Eodem modo multiplicatio peragitur, ut in Arithmetica decadica §. 97. Facta verò fingula partialia operando inventa uni eidem columnæ addi poffunt.

Multiplican:	Multiplicat:	Fact: 1.	Fact: 2.	Fact: tot:
oo		oooo	o oo *	o oo
ooo		o oo	o oo	oooo
o	ooo	o	oooo o	o
o ooo	oo	o o	* o o	o o
2358	32	4716	70740	75456

DIVI-

DIVIDERÆ.

Eadem lege dividuntur, ut §. 100. scilicet 6, in 12 continentur bis &c.

Divisor	Dividen:	Quotus	2dum memb:	Residuum.
	0			
	00			
0 0	0 000		0 0	
*	000	00	0 00	0 0
0 000	00	0	00	0000
608	12832	21	672	64

FINIS ARITHMETICÆ.

D. O. M. G.



Pag.
4.
5.
13.
19.
21.
23.
24.
30.
35.
37.
37.
38.
40.
41.
44.
45.
Ibid
46.

ERRATA

CORRIGE

Pagin: Lin:

4. 22. Confertur
 5. 2. dimidium est
 13. 9 irrationalis
 29. patebatur
 19. 13. (3 + 2)
 21. 21. sæpe enim
 diversis
 23. 28. centenari
 24. 20. &
 30. 9. 38475.
 35. 7. denominati-
 onem
 13. Corollarium I.
 37. 1. posfit
 37. 9. Superparpar-
 ticularis
 38. 14. quartas si
 $1\frac{2}{3}$
 40. 5. Si exponens fu-
 erit 5 erit 8:3
 $= 1\frac{3}{5}$
 41. 19. pro anteceden-
 te primæ &
 pro conse-
 quente se-
 cundæ
 44. 25. A ad B & C
 45. 18. P:T = p:t
 Ibid: T:P = p:t
 46. 30. Eo etiam A
 = C
 34. (§. 140.)

infertur
 duplum est
 rationalis
 petebatur
 (3 + 2) 4
 Sæpe enim idem diversis
 centenarii
 &c.
 38476
 denominatorem
 Corollarium III
 possit
 superparticularis
 quartas, si $1\frac{3}{4}$
 Si exponens fuerit $\frac{5}{8}$;
 erit 8:5 = $1\frac{3}{5}$
 pro antecedente secundæ,
 & pro consequente pri-
 mæ
 A & Bad C
 P:T = p:t
 T:P = t:p,
 Ergo etiam A = C
 (§. 126.)
 (§. 150.)

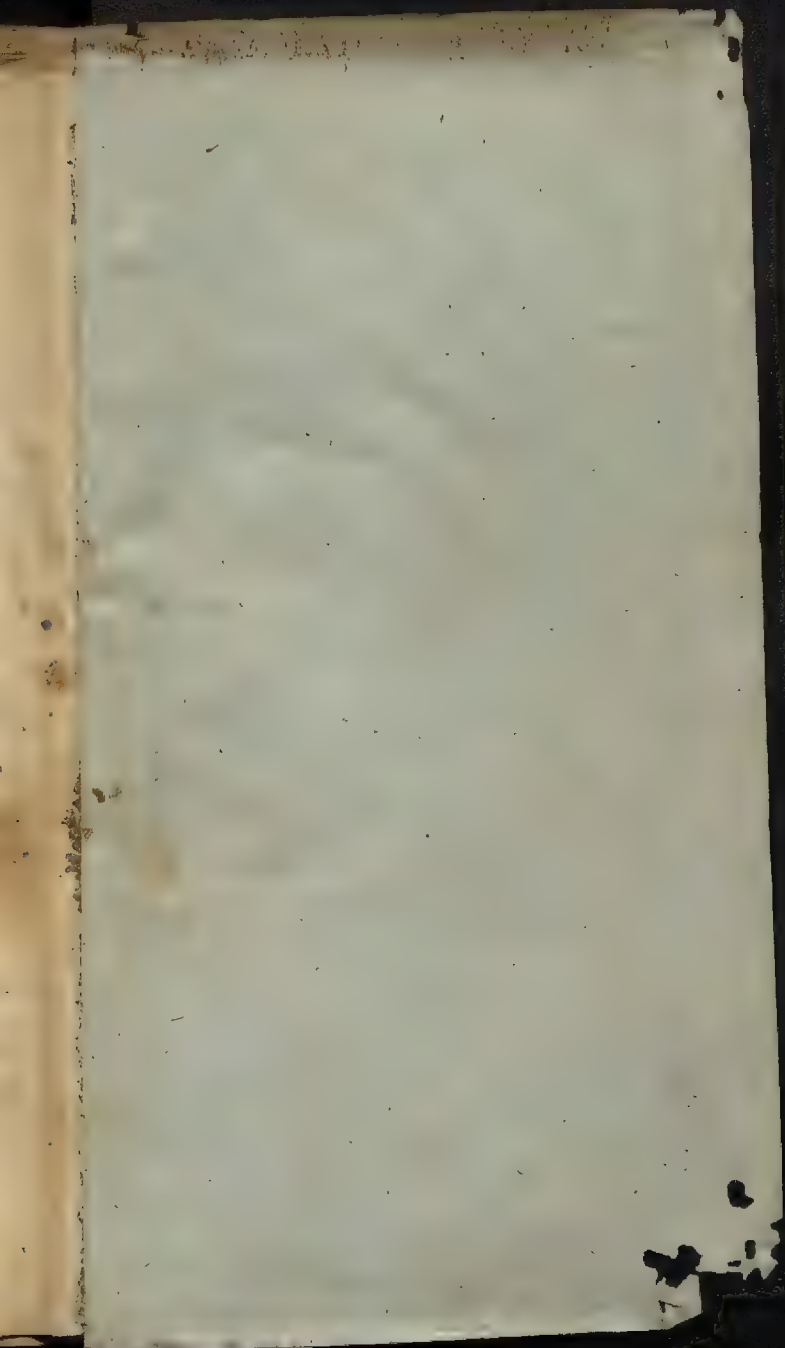
ERRATA

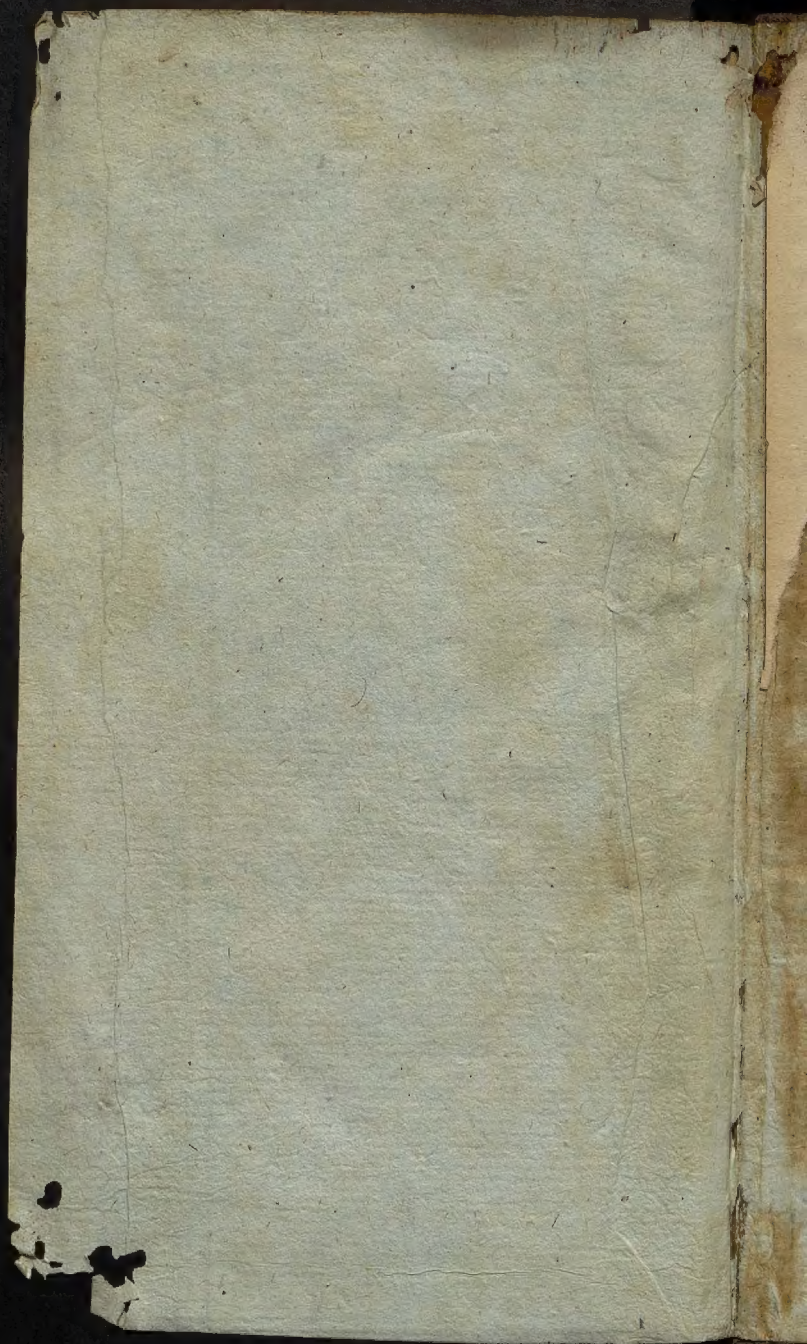
Pagina Linea

47. 32. 156
 48. 5. (§. 138)
 51. 23. A:B < C:D
 52. 21. (§. 160)
 65. 23. $\frac{5}{72}$
 73. 19. a = 2²
 74. 14. 46
 77. 32. THEOREMA
 82. 19. Quadratum Partis II.
 85. 26. 115610
 93. 20. AB:BC
 94. 11. (§. 152)
 12. (§. 141.)
 99. 26. = 70016 gr: 700 $\frac{4}{25}$
 28. 30) 700($\frac{10}{2330}$
 113. 16. (§. 403)
 117. 9. (§. 271.)
 120. 28. 2:471:1:235
 124. 15. 3.7589982
 19. 3.5589875
 128. 1. 0.3679767
 134. 12. (§. 346.332.)
 140. 7. 46^v
 141. 33. quæsitum
 146. 17. 22804 $\frac{236}{241}$
 18. 22804
 7. 101 $\frac{41}{53}$
 148.

CORRIGE

- 155
 (§. 148)
 A:B < C:D. Pona-
 mus A:B > C:D
 (§. 163)
 $\frac{54}{72}$
 a = 2, 2²
 64
 PROBLEMA
 Quadratum Partis I.
 115600
 AD:BC
 (142)
 (§. 157.)
 = 1094 gr. : 700 $\frac{4}{25}$
 30) 700($\frac{10}{2330}$
 (§. 313.)
 (§. 303.)
 2:4 = 1:235
 3.7590632
 3.7589875
 — 0.3679767
 (§. 356.332.)
 46
 mensurarum
 28879 $\frac{161}{241}$
 28879
 35
 105 53





Biblioteka Jagiellońska



stdr0027074



27

C.
#35